



**TUGAS AKHIR – SM141501**

**MAGNETOHIDRODINAMIK TAK TUNAK PADA  
KONVEKSI CAMPURAN YANG MENGALIR MELALUI  
BOLA TERIRIS DALAM FLUIDA KENTAL DI BAWAH  
PENGARUH MEDAN MAGNET**

**MOCHAMAD SATRIA DHARMA UTAMA  
1213 100 042**

**Dosen Pembimbing:**

- 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc**
- 2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya  
2017**

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



**FINAL PROJECT – SM141501**

***UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS ON MIXTURE  
CONVECTION FLOWING THROUGH A SLICED SPHERE IN  
VISCOUS FLUID UNDER THE INFLUENCE OF MAGNETIC  
FIELD***

**MOCHAMAD SATRIA DHARMA UTAMA  
1213 100 042**

**Supervisors:**

- 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc**
- 2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Science  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya  
2017**

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LEMBAR PENGESAHAN

**MAGNETOHIDRODINAMIK TAK TUNAK PADA KONVEKSI  
CAMPURAN YANG MENGALIR MELALUI BOLA TERIRIS  
DALAM FLUIDA KENTAL DI BAWAH PENGARUH MEDAN  
MAGNET**

***UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS ON MIXTURE  
CONVECTION FLOWING THROUGH A SLICED SPHERE IN  
VISCOUS FLUID UNDER THE INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD***

### TUGAS AKHIR

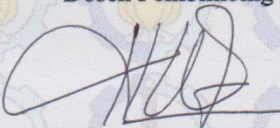
Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang minat Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya  
Oleh:

**MOCHAMAD SATRIA DHARMA UTAMA**  
NRP. 1213 100 042

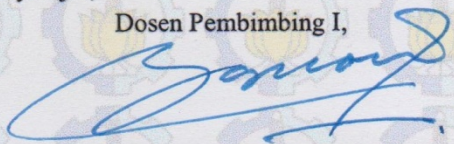
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,



Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si  
NIP. 19830517 200812 1 003




Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
NIP. 19650605 198903 1 002

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika  
FMIPA ITS



  
Dr. Imam Mukhlash, S.Si, M.T  
NIP. 19700831 199403 1 003

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

# **MAGNETOHIDRODINAMIK TAK TUNAK PADA KONVEKSI CAMPURAN YANG MENGALIR MELALUI BOLA TERIRIS DALAM FLUIDA KENTAL DI BAWAH PENGARUH MEDAN MAGNET**

Nama Mahasiswa : Mochamad Satria Dharma Utama  
NRP : 1213 100 042  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

## **Abstrak**

Magnetohidrodinamik (MHD) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik akibat medan magnet. Pada Tugas Akhir ini telah diamati permasalahan tentang aliran fluida kental yang mengalir bola teriris bermagnet dengan alirannya dipengaruhi konveksi campuran dengan berfokus pada kondisi tak tunak. Aliran fluida kental yang melewati bola teriris akan membentuk lapisan batas. Berdasarkan fenomena pada lapisan batas tersebut dibentuk Persamaan Pembangunan dari model matematika, Persamaan Pembangunan berdimensi ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensional selanjutnya ditransformasikan ke dalam bentuk Persamaan Similaritas. Kemudian, Persamaan Similiritas tersebut diselesaikan secara numerik dengan metode Keller-Box. Setelah itu, dikaji tentang perbandingan parameter yang digunakan yaitu parameter magnetik, parameter konveksi, dan besar sudut irisan bola terhadap kurva kecepatan dan temperatur dengan cara mengembangkan model matematika dari permasalahan di atas dan menyelesaikan secara numerik menggunakan metode Keller-Box.

Hasil dari penelitian ini, dengan model matematika yang didapatkan melalui persamaan-persamaan sebelumnya diketahui bahwa semakin besar parameter magnetik, parameter konveksi dan sudut irisan, maka semakin meningkat pula kecepatan aliran fluida

atau variasi parameter tersebut berbanding lurus dengan kecepatan fluida. Selain itu, semakin besar parameter magnetik, parameter konveksi dan sudut irisan maka semakin berkurang pula temperatur fluida atau parameter tersebut berbanding terbalik dengan temperatur fluida. Namun pada simulasi temperatur Bilangan Prandtl berlaku sebaliknya, Bilangan Prandtl berbanding lurus dengan temperatur fluida dan berbanding terbalik terhadap kecepatan fluida. Selain itu hasil dari setiap simulasi menunjukkan bahwa setiap kurva dari setiap simulasi parameter akan berubah secara signifikan pada setiap perubahan jarak titik penelitian atau jarak lapisan batas.

**Kata kunci:** *Fluida Kental, Konveksi Campuran, Bola Teriris, Magnet, Magnetohidrodinamik, Metode Keller-Box.*



# **UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS ON MIXTURE CONVECTION FLOWING THROUGH A SLICED SPHERE IN VISCOUS FLUID UNDER THE INFLUENCE OF MAGNETIC FIEL**

Name : Mochamad Satria Dharma Utama  
NRP : 1213 100 042  
Department : Mathematics FMIPA-ITS  
Supervisor : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

## **Abstract**

Magnetohydrodynamics (MHD) is a study of the dynamics of electrical conductive fluids due to magnetic fields. In this Final Project it has been observed the problem of the viscous fluid flow through which the magnetized sphere is magnetized with its flow influenced by mixed convection by focusing on unsteady conditions. The flow of viscous fluid passing through the sliced ball will form a boundary layer. Based on the phenomenon of the boundary layer formed the Builder Equation of the mathematical model, the dimensionless Builder Equation transformed into a non-dimensional form is then transformed into Similarity form. Then, the Similitas Equation is solved numerically by the Keller-Box method. After that, it was studied about parameter comparison which used magnetic parameter, convection parameter, and big angle of spherical to velocity curve and temperature by developing mathematical model from above problem and solving numerically using Keller-Box method.

The results of this study, with mathematical model obtained through the previous equations known that the greater the magnetic parameters, convection parameters and the angle of the slice, the more fluid flow velocity or the variation of the parameter varies proportional to the speed of the fluid. In addition, the greater the

magnetic parameters, the convection parameters and the slice angle, the lower the fluid temperature or the parameter is inversely proportional to the temperature of the fluid. However, in Prandtl Preliminary temperature simulation, the Prandtl number is proportional to the fluid temperature and inversely proportional to the fluid velocity. In addition, the results of each simulation show that each curve of each parameter simulation will change significantly at each change in the distance of the research point or the boundary layer distance.

**Keywords:** *Viscous Fluid, Magnets, Magnetohydrodynamics, Keller-Box Methods.*

## KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah atas kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

**“MAGNETOHIDRODINAMIK TAK TUNAK PADA  
KONVEKSI CAMPURAN YANG MENGALIR MELALUI  
BOLA TERIRIS DALAM FLUIDA KENTAL DI BAWAH  
PENGARUH MEDAN MAGNET”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT sebagai Kepala Departemen Matematika FMIPA-ITS.
2. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan motivasi dan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
3. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Si sebagai dosen wali selama penulis kuliah di Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
4. Drs. Sadjidon, M.Si, Dr Chairul Imron, Ml.Komp. dan Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si sebagai dosen penguji Tugas Akhir yang telah memberikan kritik dan saran yang bersifat membangun dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
5. Yang sangat terhormat Ibu saya yang telah memberikan segalanya.
6. Teman-teman Firman, seluruh MM, Via, Bhara, Ariel, Fadhlán, Oby dan seluruh mahasiswa Matematika 2013 serta keluarga STI-45 hingga STI-51 (yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu) yang telah banyak mendukung baik dari doa maupun tindakan

yang telah memberi semangat saya serta kesan yang luar biasa saat menjalani perkuliahan.

7. Semua pihak yang telah memberikan dukungan dan ilmu kepada penulis dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

Apabila dalam penulisan Tugas Akhir ini ada kekurangan, kami mohon kritik dan saran demi penyempurnaan penelitian di masa yang akan datang. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Amin.

Surabaya, Agustus 2017

Penulis

## DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN .....	v
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI .....	xiii
DAFTAR GAMBAR .....	xv
DAFTAR LAMPIRAN .....	xvii
DAFTAR SIMBOL .....	xix
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Asumsi Penelitian.....	3
1.4 Batasan Masalah .....	4
1.5 Tujuan .....	4
1.6 Manfaat .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Penelitian Terdahulu.....	7
2.2 Fluida .....	8
2.3 Fluida Newtonian .....	9
2.4 Aliran Tak Mampu Mampat Satu Fasa .....	9
2.5 Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu.....	10
2.6 Konveksi Campuran ( <i>Mixture Convection Flow</i> ) .....	10
2.7 Aliran Lapisan Batas ( <i>Boundary Layer</i> ) .....	10
2.8 Magnetohidrodinamik.....	11
2.9 Skema Keller-Box .....	14
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	
3.1 Tahap Penelitian.....	15
3.2 Diagram Alir penelitian .....	17
BAB IV MODEL MATEMATIKA	
4.1 Persamaan Pembangun .....	19
4.2 Penurunan Persamaan Pembangun Model .....	32

<b>BAB V PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA</b>	
5.1 Langkah-langkah Metode Keller-Box .....	45
5.2 Hasil Simulasi Numerik.....	60
<b>BAB VI PENUTUP</b>	
6.1 Kesimpulan .....	71
6.2 Saran .....	72
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>73</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>76</b>
<b>BIODATA PENULIS.....</b>	<b>125</b>

## DAFTAR GAMBAR

	Hal
<b>Gambar 1.1</b> Bola Teriris dan Aliran Fluida.....	2
<b>Gambar 2.1</b> Sudut Irisan Bola dalam 2 Dimensi.....	13
<b>Gambar 2.1</b> Skema Keller-Box.....	14
<b>Gambar 3.1</b> Diagram Alir Penelitian.....	17
<b>Gambar 4.1</b> Volume Kendali Pada Bagian Pusat Elemen	21
<b>Gambar 4.2</b> Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Kendali .....	22
<b>Gambar 4.3</b> Komponen Heat Flux pada Kendali Volume	25
<b>Gambar 4.4</b> Komponen Tegangan Arah x dan y Pada Permukaan Elemen Fluida .....	29
<b>Gambar 5.1</b> Gambar Stensil Beda Hingga .....	46
<b>Gambar 5.2</b> Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi( $\alpha$ ), $Pr=0.7, \theta_s = 45^\circ$ dan $M = 10$	61
<b>Gambar 5.3</b> Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi( $\alpha$ ), $Pr=0.7, \theta_s = 45^\circ$ dan $M = 10$	62
<b>Gambar 5.4</b> Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Sudut Irisan( $\theta_s$ ), $Pr=0.7, \alpha = 2$ dan $M = 10$	63
<b>Gambar 5.5</b> Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Sudut Irisan( $\theta_s$ ), $Pr=0.7, \alpha = 2$ dan $M = 10$	64
<b>Gambar 5.6</b> Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik( $M$ ), $Pr=0.7, \alpha = 2$ dan $\theta_s = 45^\circ$ ..	65
<b>Gambar 5.7</b> Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik( $M$ ), $Pr=0.7, \alpha = 2$ dan $\theta_s = 45^\circ$ ..	66
<b>Gambar 5.8</b> Kurva Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl( <b>Pr</b> ), dengan $\theta_s = 45^\circ, \alpha = 2$ dan $M =$ 10. ....	67
<b>Gambar 5.9</b> Kurva Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl( <b>Pr</b> ), dengan $\theta_s = 45^\circ, \alpha = 2$ dan $M =$ 10 .....	68

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
<b>Lampiran A</b> Penurunan Persamaan Komponen Tegangan Normal, Tegangan Geser, Gravitasi Pada Penyelesaian Persamaan Momentum Sumbu $x, y$ dan Kecepatan Aliran Bebas .....	77
<b>Lampiran B</b> Transformasi Persamaan Pembangun ke Persamaan Non-Dimensional .....	81
<b>Lampiran C</b> Perhitungan Persamaan Similaritas .....	89
<b>Lampiran D</b> Non-Dimensional Kondisi Batas Bola Teriris.....	103
<b>Lampiran E</b> Penurunan Kondisi Awal.....	105
<b>Lampiran F</b> Diskritisasi Model.....	111
<b>Lampiran G</b> Linierisasi dengan Metode Newton .....	119

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR SIMBOL

$U_{\infty}$	: Kecepatan bebas fluida
$\theta_s$	: Besar sudut irisan
$\tau$	: Tegangan geser pada fluida
$\mu$	: Viskositas fluida
$(k, n)$	: Konstanta
$Re$	: Bilangan Reynolds
$a$	: Panjang karakteristik
$v$	: Komponen kecepatan pada arah y
$M_{sys}$	: Massa system
$\rho$	: Massa jenis fluida
$\forall$	: Diemensi control volume fluida
$F$	: Gaya yang bekerja pada system
$e$	: Energi total persatuan massa pada setiap partikel system
$\tilde{u}$	: Energi persatuan massa
$\frac{V^2}{2}$	: Energi kinetik persatuan massa
$gz$	: Energi potensial persatuan massa
$Gr$	: Bilangan Grashof
$g$	: Gaya gravitasi
$\beta$	: Koefisien muai panas
$T_w$	: Temperature fluida pada lapisan batas
$T_{\infty}$	: Temperature fluida diluar lapisan batas
$Pr$	: Bilangan Prandtl
$k$	: Konduktivitas panas fluida
$c_p$	: Panas jenis pada tekanan konstan

$B$	: Medan magnet
$E$	: Medan listrik
$V$	: Kecepatan massal plasma
$J$	: Kecepatan arus
$p$	: Tekanan plasma
$t$	: Waktu
$\mu_0$	: Permeabilitas ruang hampa
$\hat{n}$	: Vektor normal terhadap elemen $dA$
$b$	: Induksi medan magnet
$\sigma$	: Konduktivitas listrik
$I$	: Matriks identitas
$\nu$	: Viskositas kinematik
$\psi$	: Fungsi alir

# **BAB I**

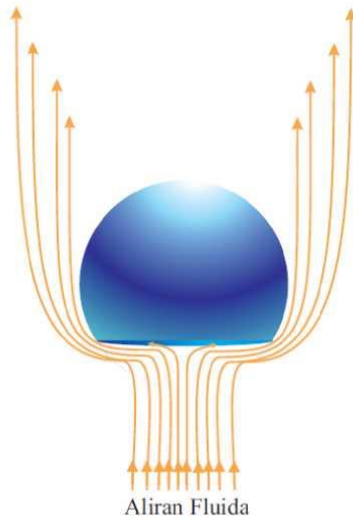
## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Aliran magnetohidrodinamik atau *Magnetohydrodynamic Flow* (MHD) adalah salah satu aliran khusus yang cukup sering diteliti beberapa tahun ini. Aliran Magnetohidrodinamik mempelajari aliran fluida yang dapat menghantarkan aliran listrik dan dipengaruhi oleh medan magnet [1].

Pada bidang teknologi , pemanfaatan magnetohidrodinamik cukup luas. Salah satunya adalah pada PLTU. Dengan adanya kombinasi MHD pada PLTU, dapat diperoleh efisiensi mencapai 30% [2]. MHD juga dimanfaatkan pada pengeboran minyak, simulasi aliran lumpur yang akurat pada pengeboran minyak di persekitaran antara dinding tanah dan pipa bor sangat penting dalam mengevaluasi variasi tekanan dalam lumpur di dalam sumur-bor, penurunan tekanan gesekan dan efisiensi transportasi dari stek rock drill. Medan magnet juga dapat digunakan untuk mengendalikan operasi aliran seperti di mana cairan keluar mengandung listrik dan terionisasi [3]. Pada penelitian sebelumnya, MHD juga sudah banyak diteliti diberbagai objek, seperti silinder optik, bola berpori, pelat datar, lempeng elastis, bola pejal, dan sebagainya.

Berdasarkan kegunaan dari MHD yang sangat menunjang perkembangan teknologi, maka perlu dilakukan penelitian yang lebih mendalam tentang MHD. Proses dari magnetohidrodinamik ini divisualisasikan oleh Gambar 1.1. Pada Tugas Akhir ini dikaji kecepatan dan temperatur aliran fluida kental penghantar listrik yang melewati penampang permukaan bola teriris. Fluida pekat yang mengalir melewati bola teriris akan membentuk lapisan tipis yang disebut lapisan batas (*boundary layer*). Lapisan batas ini terbentuk karena adanya pengaruh viskositas fluida.



**Gambar 1.1** Bola Teriris dan Aliran Fluida

Dalam hal ini aliran fluida kental dipengaruhi oleh medan magnet dan aliran konveksi. Medan magnet disekitar fluida akan merubah kecepatan fluida karena adanya gaya magnet yang mempengaruhi aliran fluida. Konveksi merubah temperatur aliran fluida kental yang melewati permukaan bola teriris karena adanya gaya luar yang mempengaruhi perpindahan panas. Permukaan irisan bola mempengaruhi kecepatan dan suhu aliran fluida, karena aliran fluida dengan kecepatan mula-mula dihalangi oleh penampang bola teriris. Variasi sudut irisan bola juga mempengaruhi kecepatan fluida karena luas penampang yang menghalangi fluida berubah.

Penelitian sebelumnya mengenai permasalahan magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak dengan konveksi paksa yang mengalir melewati bola teriris telah dilakukan. Pada penelitian tersebut, diteliti magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak dengan konveksi paksa yang mengalir melewati bola teriris dengan di teliti berbagai parameter [4].

Dalam Tugas Akhir ini diperoleh kaitan hubungan parameter magnetik, parameter konveksi, dan besar sudut irisan bola terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluid. Penelitian ini juga diperoleh kajian secara teoritik dan numerik pengaruh medan magnet dan perpindahan panas dengan konveksi campuran pada fluida pekat yang melewati sebuah benda yang berbentuk bola teriris dibawah pengaruh medan magnet dari bola teriris. Bola yang diiris adalah bola pejal dengan permukaan halus (tidak berpori).

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah disajikan, permasalahan yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika magnetohidrodinamik yang tak tunak pada konveksi campuran yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet?
2. Bagaimana penyelesaian model matematika magnetohidrodinamik yang tak tunak pada konveksi campuran yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet?
3. Bagaimana pengaruh magnetohidrodinamik yang tak tunak pada konveksi campuran yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet terhadap parameter magnetik ( $M$ ), parameter konveksi ( $\alpha$ ), besar sudut irisan bola ( $\theta_s$ ), dan bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan dan temperatur pada lapisan batas?

## **1.3 Asumsi Penelitian**

Asumsi yang digunakan pada Tugas Akhir ini sebagai berikut:

1. Geometri benda pada penelitian ini yang diamati adalah bola pejal teriris dengan bagian yang diiris yaitu bagian bawah dan besar sudut iris  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ . Tidak ada induksi listrik.
2. Aliran fluida dari bawah ke atas.
3. Bola teriris dalam keadaan diam dan permukaan halus (tidak berpori)
4. Lapisan batas diasumsikan incompressible dan dalam keadaan tak tunak.

#### **1.4 Batasan Masalah**

Dalam Tugas Akhir ini, penulis membatasi permasalahan sebagai berikut :

1. Sudut pengamatan pada titik stagnasi ( $x \approx 0$ ).
2. Penelitian ini difokuskan pada aliran lapisan batas dengan konveksi campuran.
3. Untuk mendapatkan penyelesaian dari Persamaan Pembangun model digunakan metode Keller-Box.

#### **1.5 Tujuan**

Tujuan dari Tugas Akhir ini sebagai berikut :

1. Menyusun model matematika dari permasalahan magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak dengan konveksi campuran yang mengalir melewati bola teriris dibawah pengaruh medan magnet.
2. Mendapatkan solusi numerik dari model magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak dengan konveksi campuran yang mengalir melewati bola teriris dibawah pengaruh medan magnet.
3. Menganalisis pengaruh parameter magnetik, parameter konveksi, dan besar sudut irisan bola terhadap kurva kecepatan dan temperatur pada aliran fluida kental dibawah pengaruh medan magnet.



## 1.6 Manfaat

Manfaat dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu Matematika terapan di bidang teknologi dan industri, khususnya aplikasi metode beda hingga Keller-Box pada permasalahan aliran fluida kental dan pengaruh magnetohidrodinamik tak tunak dengan konveksi campuran pada permukaan bola teriris dibawah pengaruh medan magnet.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini disusun berdasarkan sistematika penulisan sebagai berikut:

- BAB I PENDAHULUAN, berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, asumsi penelitian, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan Tugas Akhir.
- BAB II TINJAUAN PUSTAKA, menjelaskan tentang penelitian terdahulu, fluida, fluida newtonian, aliran tak mampu mampat satu fasa, tipe aliran fluida berdasarkan kriteria waktu, konveksi campuran (*mixture convection flow*), aliran lapisan batas (*boundary layer*), magnetohidrodinamik, dan skema Keller-Box.
- BAB III METODOLOGI PENELITIAN, berisi tentang langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir.
- BAB IV MODEL MATEMATIKA, menjelaskan mengenai Persamaan Pembangun (*governing equation*) untuk membangun model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet.
- BAB V PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA, menjelaskan mengenai penyelesaian dan simulasi numerik dari model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di

dalam fluida mikroktub di bawah pengaruh medan magnet.

**BAB VI PENUTUP**, berisi kesimpulan dan saran berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan Tugas Akhir ini.

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

#### **2.1 Penelitian Terdahulu**

Penelitian mengenai aliran magnetohidrodinamik telah banyak berkembang dengan kasus yang berbeda-beda mulai dari jenis konveksi, jenis fluida, dan bentuk benda yang dilalui oleh fluida. Khalimah menganalisis aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental magnetohidrodinamik yang melewati silinder eliptik, telah mengkaji pengaruh hubungan parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi, dan variasi sumbu vertikal dan horizontal pada silinder eliptik [5]. Dalam penelitiannya, melalui simulasi numerik diperoleh hubungan parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi dan variasi sumbu vertikal dan horizontal pada silinder eliptik yaitu profil kecepatan fluida semakin besar dengan bertambahnya parameter magnetik, parameter konveksi dan bertambah panjangnya sumbu vertikal, sedangkan bertambahnya sumbu horizontal akan mengakibatkan kecepatan fluida menurun. Untuk kasus bilangan Prandtl yang nilainya diperbesar, kecepatan fluida mengalami penurunan yang tidak signifikan. Untuk profil temperatur fluida, temperatur semakin menurun dengan bertambahnya parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi dan sumbu vertikal, sedangkan temperatur fluida mengalami kenaikan pada saat bertambahnya sumbu horizontal silinder eliptik. Selain itu, Mohamed dkk yang dalam penelitiannya melibatkan konveksi bebas, menjelaskan bahwa dengan bertambahnya bilangan Prandtl mengurangi ketebalan lapisan batas termal [6].

Pada tahun 2015, Widodo dkk menjelaskan mengenai solusi numerik aliran magnetohidrodinamik tak tunak pada konveksi paksa dan perpindahan panas pada fluida kental yang melalui bola dengan menggunakan metode Keller-Box [7]. Hasil yang diperoleh dari

solusi dan simulasi numerik menunjukkan bahwa ketika parameter magnetik bertambah maka distribusi temperatur fluida berkurang dan ketika parameter magnetik berkurang maka distribusi kecepatan fluida juga berkurang. Selain itu, pada tahun 2016 Widodo dkk menjelaskan bahwa kecepatan semakin bertambah seiring bertambahnya medan magnet [8]. Selain dalam fluida kental, medan magnet juga berpengaruh dalam fluida mikropolar, hal ini dijelaskan dalam penelitian Widodo dkk yang berjudul *Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics In Micropolar Fluid Past A Sphere* yang menjelaskan bahwa dengan bertambahnya parameter magnetik maka profil kecepatan semakin bertambah pada fluida mikropolar [9].

## 2.2 Fluida

Fluida merupakan zat yang dapat berubah bentuk secara terus-menerus jika terkena tegangan geser meskipun tegangan geser itu kecil. Tegangan geser adalah gaya geser dibagi dengan luas permukaan tempat adanya gaya geser tersebut. Gaya geser adalah komponen gaya yang menyinggung permukaan [10].

Fluida mempunyai dua sifat fisik yaitu viskositas dan densitas. Dimana viskositas adalah sifat fluida yang diberikannya tahanan terhadap tegangan geser oleh fluida tersebut. Besar kecilnya viskositas fluida tergantung pada suhu fluida tersebut. Untuk fluida cair, makin tinggi suhunya, maka viskositasnya makin kecil, sedang untuk fluida gas, makin tinggi suhunya, maka viskositasnya makin besar. Sedangkan densitas atau kerapatan suatu fluida didefinisikan sebagai *massa* per satuan *volume* [10]. Berdasarkan tegangan geser (*shear stress*) dan laju geser atau laju regangan geser (*shear rate*) fluida dibagi menjadi dua yaitu fluida *Newtonian* dan fluida *Non-Newtonian* [11].

Fluida diklasifikasikan sebagai fluida *Newtonian* dan *non-Newtonian*. Namun, apabila fluida yang tegangan gesernya tidak

berhubungan secara linier terhadap laju regangan geser dinamakan *Fluida non-Newtonian*. Sedangkan hidrokarbon berantai panjang yang kental bersifat *non-Newtonian*

### 2.3 Fluida Newtonian

Dalam fluida Newtonian hubungan antara tegangan geser dan laju regangan geser harus linier dengan kemiringan viskositas tersebut. Viskositas dari fluida Newtonian hanya bergantung pada temperature dan tekanan. Gas dan cairan encer cenderung bersifat fluida Newtonian. Rumus untuk tegangan geser pada fluida Newtonian adalah sebagai berikut [11]:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

dengan:

$\tau$  = tegangan geser pada fluida ( $N/m^2$ )

$\mu$  = viskositas fluida ( $N/m^2 \cdot s$ )

$\frac{du}{dy}$  = gradien kecepatan fluida ( $s^{-1}$ )

### 2.4 Aliran Tak Mampu Mampat Satu Fasa

Aliran satu fasa hanya mengandung satu jenis fluida, misalnya cair atau gas tanpa ada partikel lain. Aliran air, minyak, gas alami, udara, dan lain-lain merupakan contoh aliran satu fasa. Sebuah aliran dikatakan *incompressible* (tak mampu mampat) jika pada suatu sistem aliran memiliki massa jenis tetap. Sebuah aliran dikatakan homogen jika densitasnya konstan sepanjang aliran. Sebuah aliran *incompressible* satu fasa merupakan aliran homogen, sedangkan aliran mampu mampat (*compressible*) merupakan aliran non homogen. Secara normal, cairan dan gas diperlakukan sebagai aliran *incompressible*. Namun, aliran tidak dapat dikatakan *incompressible* jika kecepatan gas mendekati, sama atau melebihi kecepatan suara [11].

## 2.5 Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu

Tipe aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu [12]:

Aliran Tunak (*Steady Flow*) Aliran tunak yaitu kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Aliran Tak Tunak (*Unsteady Flow*) Aliran tak tunak yaitu kecepatan aliran fluida yang dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

## 2.6 Konveksi Campuran (*Mixture Convection Flow*)

Konveksi untuk menunjukkan pada perpindahan panas yang akan terjadi antara permukaan dan fluida yang bergerak ketika mereka berada pada perbedaan temperatur. Perpindahan panas konveksi dapat diklasifikasikan dalam tiga kategori yaitu konveksi bebas (*free convection*), konveksi paksa (*forced convection*) dan konveksi campuran (*mixture convection*). Bila gerakan mencampur berlangsung semata-mata sebagai akibat dari perbedaan kerapatan yang disebabkan gradien temperatur, maka dikatakan sebagai konveksi bebas/alamiah (*natural*), sedangkan bila gerakan mencampur disebabkan oleh suatu alat tertentu dari luar dikatakan sebagai konveksi paksa dan gerakan mencampur berlangsung disebabkan akibat dari perbedaan kerapatan dan alat dari luar dikatakan sebagai konveksi campuran [13].

## 2.7 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan oleh ilmuwan Jerman, Prandtl, pada tahun 1904. Pada dasarnya lapisan batas membagi daerah aliran sekitar benda ke dalam dua domain, yaitu 1)

lapisan tipis yang meliputi permukaan benda tersebut dimana radien kecepatan dan gaya viskosnya besar dan 2) daerah di luar lapisan batas tersebut yang mana kecepatan hampir sama dengan nilai aliran bebas (*free-stream*) serta efek viskositas dapat diabaikan. Dengan memakai konsep lapisan batas, persamaan gerak yang biasanya disebut *Navier-Stokes*, dapat diturunkan ke bentuk yang dapat diselesaikan. Pengaruh viskositas terhadap aliran data ditentukan dan koefisien gesekan sepanjang permukaan benda dapat dihitung [14].

## 2.8 Magnetohidrodinamik

Magnetohidrodinamik (MHD) (dinamika fluida magneto atau *hydromagnetics*) adalah studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik (konduksi listrik) yang dipengaruhi oleh medan magnet [1]. Contoh fluida yang dapat menghantarkan listrik adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. MHD diperkenalkan dan dikembangkan oleh Hannes Alfven seorang fisikawan yang pernah mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970 [5]. MHD berperan penting dalam fisika solar, astrofisika, fisika plasma, dan eksperimen plasma laboratorium. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan *Navier-Stokes* pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik [15].

Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida yakni persamaan kontinuitas, persamaan energi, dan untuk persamaan pada medan magnetnya menggunakan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan-persamaan dasar untuk membuat persamaan MHD yang ideal :

Persamaan momentum:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + J \times B$$

Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Persamaan konservasi energi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Persamaan Maxwell :

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

dimana:

$B$  : medan magnet

$E$  : medan listrik

$V$  : kecepatan massa plasma

$J$  : kecepatan arus

$\rho$  : massa jenis

$p$  : tekanan plasma

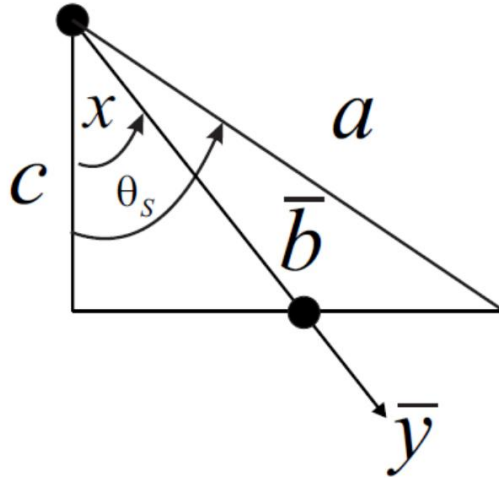
$t$  : waktu

$\mu_0$  : permeabilitas ruang hampa ( $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ )

## 2.9 Bola Teriris

Pada penelitian Tugas Akhir ini medan magnet yang dihasilkan oleh bola teriris. Ditentukan sudut menghadap kebawah dengan tengah sudut berada pada sumbu y. Kemudian bola diiris dari sudut satu ke sudut lainnya. Akibat aliran berasal dari bawah maka penampang yang dihasilkan berupa lingkaran(dari sudut pandang fluida).





**Gambar 2.1** Sudut Irisan Bola dalam 2 Dimensi

$$\cos x = \frac{c}{\bar{b}}$$

$$\cos \theta_s = \frac{c}{a}$$

$$\bar{b} \cos x = c$$

$$a \cos \theta_s = c$$

Kemudian substitusikan  $c$  menjadi

$$a \cos \theta_s = \bar{b} \cos x$$

$$\bar{b} = \frac{a \cos \theta_s}{\cos x}$$

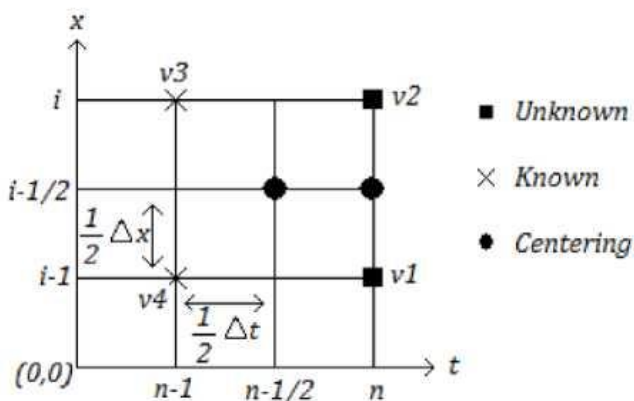
Selanjutnya diubah menjadi persamaan non-dimensional dengan menggunakan  $b = \frac{\bar{b}}{a}$ , yaitu

$$ab = \frac{a \cos \theta_s}{\cos x}$$

$$b = \frac{\cos \theta_s}{\cos x}$$

## 2.10 Skema Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana *step size* untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan differensial parsial parabolik lebih efisien dan tepat. Penerapan metode *Keller-Box* ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan. Pada Gambar 2.1 ditunjukkan cara kerja metode Keller-Box



**Gambar 2.1** Skema Keller-Box

## **BAB III**

### **METODOLOGI PENELITIAN**

#### **3.1 Tahap Penelitian**

Dengan mengacu pada tinjauan pustaka yang terdapat pada bab sebelumnya, metode yang akan dijabarkan disini akan memperjelas apa saja yang dilakukan dalam menyelesaikan permasalahan tersebut. Secara detail, desain dan metode penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Mengkaji model matematika aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris. Setiap model mempunyai karakteristik tertentu. Sehingga untuk mengembangkan model perlu dikaji terlebih dahulu dalam kaitan untuk mendapatkan model yang sesuai dengan yang diharapkan.
2. Mengkaji model matematika aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet. Pada tahap ini dikaji beberapa model aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris yang telah dihasilkan dari peneliti sebelumnya dan model aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet yang diusulkan dalam penelitian ini.
3. Mengembangkan model aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet menggunakan *continuum principle* dan hukum-hukum fisika.

4. Mengembangkan metode beda hingga implisit dengan metode Keller-Box untuk penyelesaian model matematika dari aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet. Pada tahap ini akan diselesaikan secara numerik permasalahan aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui melalui suatu benda dibawah pengaruh medan magnet.
5. Membuat algoritma program. Pada tahapan ini, akan dibuat algoritma program dari penyelesaian metode beda hingga implisit dengan skema Keller-Box terhadap model matematika dari aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet.
6. Membuat program  
Algoritma yang telah dibuat diimplementasi dalam bentuk program dengan menggunakan program Matlab.
7. *Running* program  
Program yang telah dibuat dijalankan dengan memasukkan inputan dan dianalisis hasil luaran numeriknya.
8. Verifikasi  
Tahap pembangunan model matematika dari aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet sampai pada hasil output program diverifikasi kembali.
9. Simulasi  
Dengan menggunakan program yang telah dibuat, dilakukan simulasi dengan menggunakan beberapa nilai pada parameter atau/dan variabel inputan.

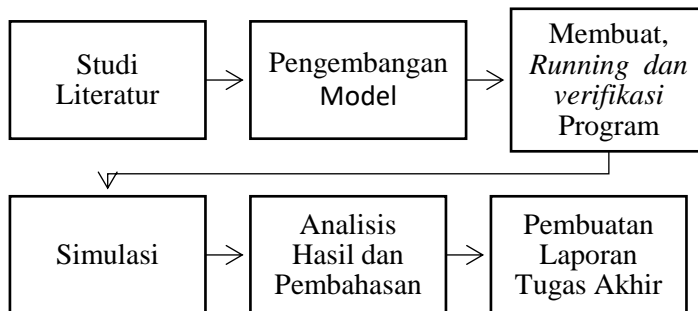
10. Analisis hasil dan pembahasan.

Hasil yang diperoleh dari beberapa simulasi yang dilakukan akan dianalisis dan dibahas, untuk kemudian dicari solusi numerik terbaik dari aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet dan membuat kesimpulan.

11. Pembuatan Laporan Tugas Akhir.

### 3.2 Diagram Alir penelitian

Alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini diperlihatkan pada Gambar 3.1.



**Gambar 3.1** Diagram Alir Penelitian

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB IV**

### **MODEL MATEMATIKA**

Pada bab ini dijelaskan dan diuraikan mengenai Persamaan Pembangun (*governing equation*) untuk membangun model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet. Medan magnet pada penelitian Tugas Akhir ini terdapat pada bola teriris yang dialiri oleh fluida kental. Dengan fokus penelitian Tugas Akhir ini pada lapisan batas yang terbentuk dari aliran fluida yang bergerak dari bawah ke atas yang melalui bola, maka digunakan Hukum Konservasi Massa dan Hukum Konservasi Momentum.

#### **4.1 Persamaan Pembangun**

Persamaan Pembangun pada penelitian ini digunakan untuk menjelaskan permasalahan maupun kondisi pada sistem. Persamaan Pembangun yang digunakan pada sistem ini diperoleh dari Hukum Kekekalan Massa, Hukum II Newton, Hukum I Termodinamika. Persamaan Pembangun ini akan fokus pada lapisan batas yang terbentuk pada permukaan bola magnet teriris akibat aliran fluida yang melewati bola teriris[4].

##### **4.1.1 Persamaan Kontinuitas**

Hukum Konservasi Massa yaitu laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem sama dengan nol atau jumlah massa dalam suatu sistem adalah konstan. Jika diamati pada sistem dimana sistem tersebut terdapat pada domain  $\Omega$  maka dapat dituliskan secara matematis:

$$\frac{DM_{\Omega}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dimana  $\frac{DQ}{Dt}$  disebut sebagai material dan  $M_\Omega$  adalah massa sistem yang diamati yang sama dengan perkalian antara densitas fluida dengan volume fluida pada keseluruhan sistem yang selanjutnya dinyatakan dengan

$$M_\Omega = \int_{\Omega} \rho dV \quad (4.2)$$

dimana  $\rho$  adalah densitas fluida dan  $V$  adalah volume fluida. Jika Persamaan (4.2) disubstitusikan ke Persamaan (4.1), maka hukum konversi massa dapat ditulis kembali menjadi :

$$\frac{DM_\Omega}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho dV \quad (4.3)$$

Dengan menggunakan teorema Pengangkutan Reynolds, laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{DM_\Omega}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \quad (4.4)$$

sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.3) diperoleh

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \quad (4.5)$$

dimana  $\mathbf{u} \cdot \hat{n} dA$  merupakan perkalian dari komponen kecepatan  $\mathbf{u}$  yang tegak lurus terhadap suatu bagian kecil permukaan volume kendali dan permukaan tersebut adalah bidang diferensial  $dA$ . Sehingga  $\mathbf{u} \cdot \hat{n} dA$  merupakan laju dari aliran volume yang melalui  $dA$  dan  $\rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA$  laju aliran massa melalui  $dA$ .

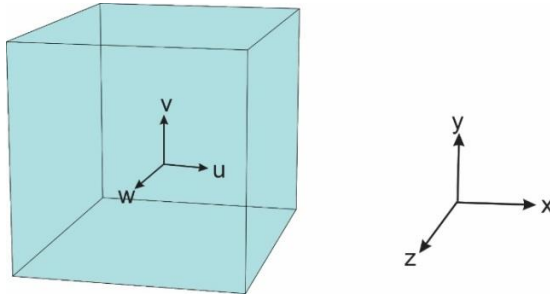
Berdasarkan Persamaan (4.3) maka Persamaan (4.5) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (4.6)$$

Persamaan (4.6) merupakan persamaan volume kendali untuk kekekalan massa.



Misalkan volume kendali yang digunakan berupa sebuah elemen kubus kecil dalam keadaan diam seperti pada Gambar 4.1.

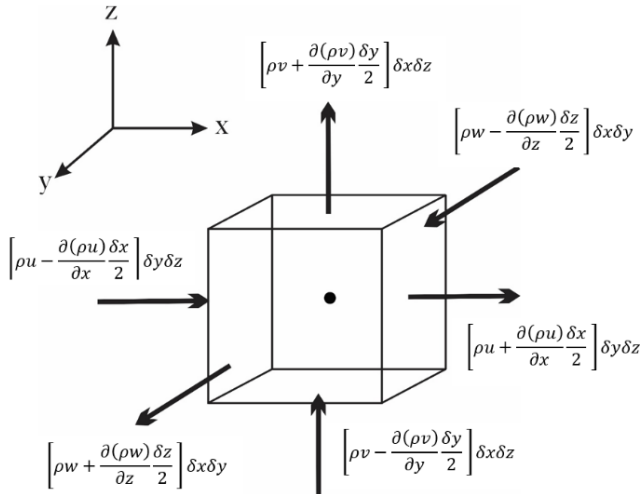


**Gambar 4.1** Volume Kendali Pada Bagian Pusat Elemen

terdapat densitas  $\rho$  dan komponen kecepatan  $u$ ,  $v$ , dan  $w$ . Karena elemen diasumsikan kecil, maka laju perubahan terhadap waktu dari massa dari kandungan volume kendali yaitu sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4.7)$$

Jumlah aliran massa pada permukaan elemen dapat diperoleh dari aliran sumbu koordinat yang digambarkan secara terpisah. Seperti pada Gambar 4.2.



#### **Gambar 4.2** Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Kendali

Aliran pada sumbu- $x$  digambarkan dengan jumlah massa aliran yang masuk dan keluar dari bagian pusat elemen, sehingga pada aliran yang keluar didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho u \Big|_{x+\frac{\delta x}{2}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2}$$

sedangkan untuk bagian aliran yang masuk didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho u \Big|_{x-\frac{\delta x}{2}} = \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2}$$

Sehingga jumlah aliran massa yang keluar pada arah sumbu- $x$  data didefinisikan sebagai berikut:

$$\left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

Dengan proses yang sama, didapatkan aliran massa yang keluar pada arah- $y$  sebagai berikut:

$$\left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[ \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

dan aliran massa yang keluar pada arah- $z$  adalah sebagai berikut.

$$\left[ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[ \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

Sehingga total aliran dapat ditulis sebagai berikut:

$$\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

Jadi laju perubahan waktu dari massa sistem yaitu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0$$

Selanjutnya, kedua ruas dibagi dengan  $\delta x \delta y \delta z$  sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Pada penelitian Tugas Akhir ini ini diasumsikan bahwa aliran fluida yang di analisis adalah aliran fluida pada bidang  $xoy$ , sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

Persamaan (4.7) dapat ditulis dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Pada penelitian Tugas Akhir ini diasumsikan fluida bersifat *incompressible*, dengan demikian bahwa densitas fluida tidak bergantung terhadap waktu ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) sehingga persamaan kontinuitasnya sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

dengan  $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ .

#### 4.1.2 Persamaan Energi

Pada Tugas Akhir ini menggunakan Persamaan Energi karena adanya temperatur yang berbeda dari aliran fluida sehingga menimbulkan adanya perpindahan energi yang berasal dari kalor antara media dengan fluida. Fenomena ini menunjukkan berlakunya Hukum I Termodinamika mengenai energi total yang tersimpan dari suatu sistem. Hukum I Termodinamika untuk sebuah sistem adalah laju pertambahan energi total yang tersimpan dari suatu sistem terhadap waktu sama dengan laju flux pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem ditambah dengan laju flux pertambahan dari kerja yang dipindahkan ke dalam sistem.

Dengan teorema pengangkutan Reynolds ditulis sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} e \rho dV = \left( \sum Q_{in} - \sum Q_{out} \right)_{\Omega} + \left( \sum W_{in} - \sum W_{out} \right)_{\Omega}$$

atau dapat ditulis dengan :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} e \rho dV = (Q_{inneto} + W_{inneto})_{\Omega} \quad (4.8)$$

Pada Tugas Akhir ini diasumsikan bahwa tidak ada kerja yang diberikan pada sistem, sehingga  $W = 0$ , maka persamaannya dapat ditulis menjadi

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} e \rho dV = (Q_{inneto})_{\Omega} \quad (4.9)$$

Energi total yang tersimpan per satuan massa dari setiap partikel di dalam sistem ( $e$ ), dihubungkan dengan energi dalam per satuan massa ( $\check{u}$ ), energi kinetic per satuan massa ( $\frac{V^2}{2}$ ), dan energi potensial per satuan massa ( $gz$ ), maka  $e$  dapat dinyatakan dengan

$$e = \check{u} + \frac{V^2}{2} + gz$$

Selanjutnya dengan mengacu pada Teorema Transport Reynolds, yaitu

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{cs} e \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.10)$$

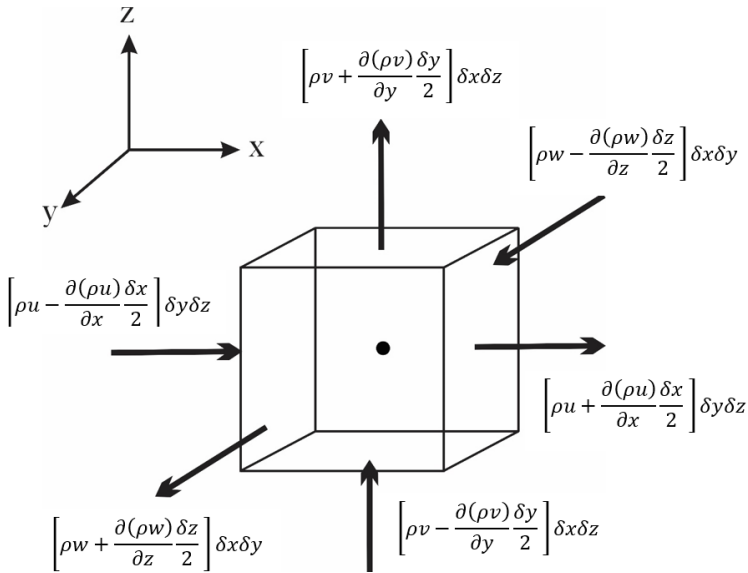
Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.10) ke Persamaan (4.9) didapatkan persamaan berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{cs} e \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dA = (Q_{inneto})_{cv} \quad (4.11)$$

Dengan menggunakan teorema Green, maka persamaan kiri dari persamaan diatas dapat dinyatakan dengan  $\int \frac{\partial}{\partial t} e \rho dV + \int \rho \nabla \cdot e \mathbf{u} dV$  atau dapat ditulis dengan  $\int \left( \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \nabla \cdot e \mathbf{u} \right) dV$ . Sehingga persamaan (4.11) dapat ditulis dengan

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e\mathbf{u}) \right) dV = (Q_{inneto})_{cv} \quad (4.12)$$

Laju flux pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem  $Q_{inneto}$  terdiri dari konduksi panas dan sumber panas  $q$ . Karena pada Tugas Akhir ini ini tidak terdapat sumber panas pada volume kendali maka  $q = 0$ . Sehingga akan diturunkan konduksi panas yang terjadi pada volume kendali sebagai berikut. Misalkan  $k$  adalah *heat flux* yang terjadi pada volume kendali yang ditunjukkan pada Gambar 4.3.



**Gambar 4.3** Komponen *Heat Flux* pada Kendali Volume

Laju flux dari penerusan panas suatu partikel fluida dapat dihitung dari perbedaan kalor yang masuk dengan kalor yang keluar pada arah-x, arah-y dan arah-z didefinisikan sebagai berikut

$$\left[ k_x - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ k_x + \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

$$\left[ k_y - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[ k_y + \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z = - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

$$\left[ k_z - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[ k_z + \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y = - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

Sehingga total laju flux pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem adalah

$$\left( - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.13)$$

Pada Tugas Akhir ini ini diasumsikan bahwa aliran fluida yang dianalisis adalah aliran fluida pada bidang  $x \cdot y$ , sehingga Persamaan (4.13) menjadi

$$\left( - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z = (-\nabla \cdot \mathbf{k}) \delta x \delta y \delta z \quad (4.14)$$

Penerusan panas karena konduksi berkaitan dengan gradien temperature yang didefinisikan dalam Hukum Fourier sebagai berikut:

$$k_x = -c \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \quad ; \quad k_y = -c \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

atau dapat ditulis

$$\mathbf{k} = -c \nabla \bar{T} \quad (4.15)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.15) ke Persamaan (4.14) diperoleh

$$(-\nabla \cdot \mathbf{k}) \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (c \nabla \bar{T}) \delta x \delta y \delta z$$

$\Leftrightarrow$

$$(-\nabla \cdot \mathbf{k}) \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (c \nabla \bar{T}) dV \quad (4.16)$$

Sehingga Persamaan (4.16) dapat ditulis dengan

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial \bar{t}} + \nabla \cdot (e \mathbf{u}) \right) dV = \nabla \cdot (c \nabla \bar{T}) dV$$

kedua ruas dibagi oleh  $dV$  diperoleh

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial \bar{t}} + \nabla \cdot (e \mathbf{u}) \right) = \nabla \cdot (c \nabla \bar{T}) \quad (4.17)$$

Pengaruh dari tekanan dan perubahan kerapatan dapat diabaikan karena dalam sistem tekanan konstan (tetap), sehingga perubahan dari energi dapat didekati dengan perubahan entalpi sebagai berikut:

$$\partial e = \partial h - \partial \left( \frac{P}{\rho} \right) \approx \partial h$$

Dengan mensubstitusikan  $\partial h \approx C_p \partial T$  ke Persamaan (4.17), sehingga diperoleh

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \nabla \cdot (\bar{T} \mathbf{u}) \right) = \nabla \cdot (c \nabla \bar{T}) \quad (4.18)$$

dengan

$$\nabla \cdot (\bar{T} \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \bar{T}) + \bar{T} (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Dalam persamaan kontinuitas  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , sehingga

$$\nabla \cdot (\bar{T} \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \bar{T})$$

Selanjutnya disubstitusikan ke Persamaan (4.18), sehingga diperoleh persamaan

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \bar{T}) \right) = \nabla \cdot (c \nabla \bar{T}) \quad (4.19)$$

dengan

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \bar{T}) = (\hat{i}\bar{u} + \hat{j}\bar{v}) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \hat{j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla T) = \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right)$$

dan

$$\nabla \cdot (c \nabla \bar{T}) = c \nabla \cdot (\nabla \bar{T})$$

$$\nabla \cdot (c \nabla \bar{T}) = c \left[ \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \hat{j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \right]$$

$$\nabla \cdot (c\nabla \bar{T}) = c \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Sehingga Persamaan (4.19) menjadi

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + u \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + v \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = c \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.20)$$

#### 4.1.3 Persamaan Momentum

Prinsip dari Persamaan Momentum didasari oleh Hukum II Newton yang disebutkan bahwa jumlah gaya yang bekerja pada sistem sama dengan besar momentum pada sistem yang berubah terhadap waktu. Momentum itu sendiri didefinisikan sebagai jumlah massa dikalikan kecepatan. Jika diaplikasikan pada sistem yang berupa kendali volume, maka didapat :

$$\sum F = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho u dV \quad (4.21)$$

Dengan menggunakan Teorema Transport Reynolds, ruas kanan dari Persamaan (4.21) dapat ditulis

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho u dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{cs} \rho (u \cdot \hat{n}) dV$$

sehingga Persamaan (4.21) menjadi

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho u dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{cs} \rho (u \cdot \hat{n}) dV$$

Berdasarkan persamaan kontinuitas, didapatkan dalam bentuk notasi vektor :

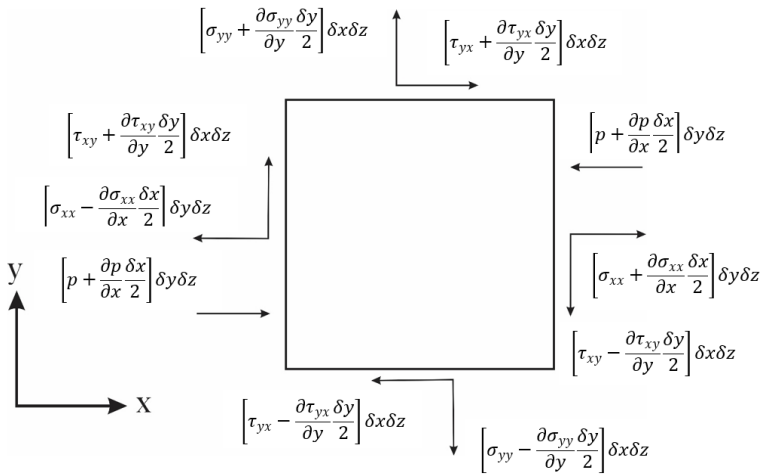
$$\int \rho \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) dV = \sum F \quad (4.22)$$

Berdasarkan sifat divergensi  $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}))$  dan  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  sehingga Persamaan (4.22) menjadi

$$\int \rho \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \right) dV = \sum F \quad (4.23)$$



Dengan  $\sum F$  adalah kumpulan gaya-gaya yang bekerja pada permukaan bola teriris yang terdiri dari gaya permukaan, gaya apung dan gaya magnet. Gaya permukaan dinotasikan  $F_s$ . Seperti yang terlihat pada Gambar 4.4 bahwa yang sejajar dengan permukaan volume kendali adalah tegangan geser, dan yang tegak lurus adalah tegangan normal.



**Gambar 4.4** Komponen Tegangan Arah  $x$  dan  $y$  Pada Permukaan Elemen Fluida

Dengan menjumlahkan seluruh gaya pada arah  $x$  sehingga didapatkan

$$F_{sx} = \int \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dV$$

dan gaya dalam arah  $y$

$$F_{sy} = \int \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dV$$

Sehingga dapat dituliskan resultan gaya permukaan

$$F_s = F_{sx}\hat{i} + F_{sy}\hat{j}$$

$$\int F_s d\forall = \left( \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \hat{j} \right) d\forall$$

Untuk fluida *Newtonian* tak mampu-mampat, diketahui bahwa tegangan berbanding lurus terhadap laju deformasi yang dinyatakan sebagai berikut:

1. Pada tegangan normal

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

2. Pada tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Dengan mensubstitusikan  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  dan  $\tau_{yx}$  sehingga diperoleh

$$\int F_s d\forall = \int (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}) d\forall$$

Untuk gaya magnetik dinotasikan dengan  $F_{mag}$  yang didasari oleh Gaya Lorentz yaitu

$$\int F_{mag} d\forall = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\forall \quad (4.24)$$

dimana  $J$  adalah kerapatan arus listrik dan  $B$  adalah total medan magnet yang terjadi dalam sistem. Sedangkan menurut hukum Ohm, bahwa kerapatan arus listrik diberikan:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Pada penelitian Tugas Akhir ini diasumsikan tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida, sehingga medan listrik ( $E$ ) sama dengan nol.

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Sehingga Persamaan (4.24) menjadi

$$\int F_{mag} d\forall = \int (\sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) d\forall \quad (4.25)$$

Dengan menggunakan identitas vektor maka Persamaan (4.25) dapat dituliskan menjadi :

$$\int F_{mag} dV = \int \sigma \{ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} \} dV$$

$$\int F_{mag} dV = \int \sigma \{ (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta_{uB}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} \} dV \quad (4.26)$$

Dikarenakan  $\theta_{uB} = \pi/2$  sehingga Persamaan (4.26) dapat dituliskan

$$\int F_{mag} dV = \int -\sigma (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} dV \quad (4.27)$$

Karena  $B = (b + B_0)$ , dimana  $B$  adalah medan magnet total,  $B_0$  adalah medan magnet dari bola yang mengandung magnet, dan  $b$  adalah besarnya medan magnet dari fluida yang terinduksi oleh bola bermagnet. Sehingga dengan mensubstitusikan  $B = (b + B_0)$  pada Persamaan (4.27) didapat

$$\int F_{mag} dV = \int -\sigma (b + B_0)^2 \mathbf{u} dV \quad (4.28)$$

Selanjutnya diasumsikan bahwa medan magnet yang dihasilkan oleh induksi magnet sebesar  $\frac{1}{4}$  dari medan magnet dari bola teriris, sehingga Persamaan (4.28) dituliskan menjadi

$$\int F_{mag} dV = \int -\sigma \left( \frac{1}{4} B_0 + B_0 \right)^2 \mathbf{u} dV$$

$$\int F_{mag} dV = \int -\sigma \frac{25}{16} B_0^2 \mathbf{u} dV \quad (4.29)$$

Gaya apung dinotasikan dengan  $F_{buo}$  dimana

$$\int F_{buo} dV = \int \rho \mathbf{g} dV$$

Sedangkan  $p$  pada persamaan gaya permukaan dapat diuraikan menjadi

$$p = p_d + p_h$$

dimana  $p_h$  adalah tekanan hidrostatik dan  $p_d$  tekanan dinamik. Bentuk gradien tekanan yang disebabkan oleh tekanan hidrostatik adalah

$$\nabla p_h = \rho_\infty \mathbf{g}$$

yang mana  $\rho_\infty$  adalah massa jenis diluar lapisan batas. Selanjutnya bentuk  $-\nabla p$  pada persamaan 4.24 dapat dituliskan sebagai berikut

$$-\nabla p_d - \nabla p_h = -\nabla p_d - \rho_\infty \mathbf{g}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan semua persamaan F, diperoleh persamaan momentum sebagai berikut

$$\int \rho \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dV = \sum F$$

dengan:

$$\sum F = \int F_s dV + \int F_{mag} dV + \int F_{buo} dV$$

$$\sum F = \int (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}) dV - \int \sigma \frac{25}{16} B_0^2 \mathbf{u} dV + \int \rho \mathbf{g} dV$$

dimana  $\mathbf{g} = (g_x, g_y, 0)$

## 4.2 Penurunan Persamaan Pembangunan Model

Persamaan Pembangunan yang digunakan pada fluida yang bersifat unsteady dan incompressible adalah sebagai berikut:

1. Persamaan Kontinuitas

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.30)$$

2. Persamaan Energi

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.31)$$

3. Persamaan momentum

$$\int \rho \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dV = \int (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}) dV \quad (4.32)$$

$$+ \int -\sigma \frac{25}{16} B_0^2 \mathbf{u} dV + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g}$$

dengan  $\bar{r}(\bar{x}) = \bar{b} \sin \frac{\bar{x}}{\bar{b}}$ .

Dimana variabel yang menggunakan tanda  $\bar{\phantom{x}}$  menunjukan bahwa variabel tersebut merupakan variabel berdimensi.

#### 4.2.1 Persamaan Momentum

Dikarenakan pada Tugas Akhir adalah objek yang dialiri adalah sebuah bola dengan aliran satu dimensi yang mana akan mengakibatkan sumbu- $y$  dan sumbu- $z$  simetri sehingga salah satunya dapat diabaikan. Pada kasus ini sumbu- $z$  diabaikan. Sehingga persamaan momentum yang ada dapat dibangun cukup pada sumbu- $x$  dan sumbu- $y$ . Pada persamaan momentum (4.32) terdapat komponen vektor, dan apabila dijabarkan akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

Ruas kiri pada Persamaan (4.32) yang berupa  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\ &= \frac{\partial \bar{u} \hat{i}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{v} \hat{j}}{\partial \bar{t}} \end{aligned}$$

Ruas kiri dari Persamaan (4.32) yang berupa  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  adalah

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \left( (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \hat{j} \right) \right) (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\ &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u} \hat{i}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u} \hat{i}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v} \hat{j}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v} \hat{j}}{\partial \bar{y}} \end{aligned}$$

Ruas kanan dari persamaan (4.32) yang berupa  $\nabla p$  adalah

$$\nabla p = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \hat{j} \right) p = \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \hat{j}$$

Ruas kanan dari persamaan (4.32) yang berupa  $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$  adalah

$$\begin{aligned}
\mu \nabla^2 \mathbf{u} &= \mu \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \hat{j} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \hat{j} \right) (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\
&= \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\
&= \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \hat{i} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \hat{i} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \hat{j} + 2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \hat{j} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \hat{j} \right) \\
&= \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \hat{i} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \hat{j}
\end{aligned}$$

Ruas kanan dari persamaan (4.32) yang berupa  $\sigma \frac{25}{16} B_0^2 \mathbf{u}$  adalah

$$\sigma \frac{25}{16} B_0^2 \mathbf{u} = \sigma \frac{25}{16} B_0^2 (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j})$$

Dengan mengelompokkan vektor  $\hat{i}$  untuk sumbu  $x$  dan vektor  $\hat{j}$  untuk sumbu  $y$  didapatkan persamaan momentum pada sumbu  $x$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\
&\quad - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{u} + (\rho - \rho_\infty) g_x
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Sedangkan untuk persamaan momentum pada sumbu  $y$  yaitu:

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\
&\quad - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{v} + (\rho - \rho_\infty) g_y
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Sesuai dengan pendekatan *Boussinesq* yaitu semua variabel yang berpengaruh dalam Persamaan Momentum diatas diabaikan, kecuali kerapatan. Pendekatan Boussinesq digunakan untuk mendekati perbedaan kerapatan yang menyebabkan adanya aliran sebagai akibat dari interaksi antara gaya gravitasi dan tekanan hidrostatik seperti pengaruh temperatur. Berdasarkan pendekatan Deret Taylor, yaitu

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) + O(\bar{T} - T_\infty)^2$$

Diasumsikan bahwa nilai  $(\bar{T} - T_\infty)$  kecil sehingga bagian yang berorder tinggi dapat dihilangkan, maka persamaannya dapat diubah menjadi[4]

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty)$$

$$\rho - \rho_\infty = -\rho\beta(\bar{T} - T_\infty) \quad (4.35)$$

Dengan  $\beta$  adalah koefisien ekspansi panas yang dapat dinyatakan dengan

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \bar{T}} \right)_p$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (4.35) pada persamaan momentum sumbu- $x$  dan sumbu- $y$  yang ditunjukkan pada Persamaan (4.33) dan (4.34), persamaan momentumnya menjadi

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{u} \\ + \rho\beta(\bar{T} - T_\infty)g_x \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pada sumbu- $x$  dan pada sumbu- $y$  dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{v} \\ + \rho\beta(\bar{T} - T_\infty)g_y \end{aligned} \quad (4.37)$$

Pada Tugas Akhir ini menggunakan kondisi batas yaitu:

$$\bar{t} < 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} \geq 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w \text{ untuk setiap } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} = T_\infty \text{ saat } \bar{y} \rightarrow \infty$$

Dengan kecepatan aliran bebas  $\bar{u}_e = \frac{3}{2} \sin \left( \frac{\bar{x}}{\bar{b}} \right)$

#### 4.2.2 Transformasi Variabel Tak Berdimensi

Variabel tak berdimensi digunakan untuk mempermudah proses komputasi. Pada permasalahan ini variabel tak berdimensi yang digunakan adalah sebagai berikut[6]

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\bar{x}}{a}, & y &= Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}, & r &= \frac{\bar{r}}{a}, & b &= \frac{\bar{b}}{a} \\
 u &= \frac{\bar{u}}{U_\infty}, & v &= Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty} \\
 t &= \frac{U_\infty \bar{t}}{a} \\
 p &= \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2}, & T &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Dengan  $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$  dan  $\nu$  adalah viskositas kinematik yang dapat dituliskan sebagai  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Ditambahkan pula parameter-parameter yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{Parameter Magnetik (M)} & \quad M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \\
 \text{Parameter Konveksi } (\alpha) & \quad \alpha = \frac{Gr}{Re^2} \\
 \text{Bilangan Grashof (Gr)} & \quad Gr = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) a^3}{\nu} \\
 \text{Bilangan Prandtl (Pr)} & \quad Pr = \frac{\nu \rho C_p}{c}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi (4.38) dan parameter (4.39) pada Persamaan (4.30), (4.31), (4.36) dan (4.37) sehingga didapatkan:

1. Persamaan Kontinuitas



$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.40)$$

2. Persamaan Momentum sumbu- $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ - \frac{25}{16} Mu + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

3. Persamaan Momentum sumbu- $y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ - \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v + \frac{\alpha T}{Re^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

4. Persamaan Energi

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.43)$$

Berdasarkan variabel tak berdimensi (4.39) maka, kondisi batas (4.42) menjadi

$t < 0 : u = v = 0, T = 0$  untuk setiap  $x, y$

$t \geq 0 : u = v = 0, T = 1$  untuk setiap  $y = 0$

$u = u_e(x), T = 0$  saat  $y \rightarrow \infty$

#### 4.2.3 Pendekatan Lapisan Batas

Digunakan pendekatan lapisan batas dengan  $Re \rightarrow \infty$  sehingga  $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ , maka diperoleh

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.44)$$

Persamaan Momentum sumbu- $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16}Mu \\ + \alpha T \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

2. Persamaan Momentum sumbu- $y$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.46)$$

3. Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.47)$$

Pada Persamaan (4.46) ditunjukkan bahwa Persamaan momentum tidak terpengaruh oleh variabel  $y$ . Sehingga tekanan alirannya hanya bergantung pada sumbu- $x$ . Maka persamaan momentum diluar lapisan batas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - \frac{25}{16}Mu_e \\ + \alpha T \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Dengan menggunakan kecepatan aliran bebas  $u_e = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)$  sehingga diperoleh

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.49)$$

Selanjutnya disubstitusikan Persamaan (4.49) pada Persamaan (4.48) diperoleh

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{25}{16}Mu_e + \alpha T \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)$$

dan pada saat  $T = 0$  diperoleh persamaan

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{25}{16}Mu_e \quad (4.50)$$

Kemudian kondisi  $T = 0$  Persamaan (4.50) pada Persamaan (4.48)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u - u_e) \\ + \alpha T \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

#### 4.2.4 Fungsi Alir

Pada Tugas Akhir ini digunakan penampang dua dimensi pada bidang  $x$  dan  $y$  yang hanya memiliki dua komponen kecepatan yaitu  $u$  dan  $v$ . Untuk menghubungkan dua fungsi kecepatan tersebut maka dikenalkan sebuah fungsi alir. Dengan adanya fungsi alir akan menyederhanakan banyaknya persamaan dan membuat komputasi hanya pada satu variabel. Fungsi alir ini dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan fungsi alir pada Persamaan (4.44), (4.51) dan (4.47), maka didapat persamaan sebagai berikut:

1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (4.52)$$

2. Persamaan Momentum sumbu- $x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\ - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\ + \alpha T \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

3. Persamaan Energi

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.54)$$

Kondisi batasnya dapat dituliskan dalam bentuk fungsi alir menjadi

$$t < 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = T = 0 \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t \geq 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 1 \text{ untuk setiap } y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x), T = 0 \text{ saat } y \rightarrow \infty$$

#### 4.2.5 Persamaan Similaritas

Persamaan kontinuitas pada Persamaan (4.52) dapat dihilangkan dari hasil fungsi alir sehingga Persamaan Pembangun hanya ada 2 yaitu persamaan momentum dan persamaan energi. Variabel similaritas untuk *small time* ( $t \leq t^*$ ) dengan  $t^*$  sebarang nilai yaitu

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \quad T = s(x, \eta, t) \quad \eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}} \quad (4.55)$$

Sedangkan untuk *large time* ( $t > t^*$ ) dengan  $t^*$  sebarang nilai yaitu

$$\psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t) \quad T = S(x, Y, t) \quad Y = y \quad (4.56)$$

Dengan menerapkan Persamaan (4.55) pada Persamaan (4.53) dan (4.54), Persamaan Pembangun untuk *small time* yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = \\ t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ - \frac{25}{16} M t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \alpha t s \frac{\tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)}{u_e} \end{aligned} \quad (4.57)$$

untuk momentum, dan

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{\mathbf{Pr} \eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \mathbf{Pr} t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} = \quad (4.58)$$

$$\mathbf{Pr}t \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right]$$

untuk energi.

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0 \text{ untuk semua } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = u_e(x), s = 0 \text{ pada saat } \eta \rightarrow \infty$$

Sedangkan dengan menerapkan Persamaan (4.56) pada Persamaan (4.53) dan (4.54), Persamaan Pembangun untuk *large time* menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + \frac{25}{16} M \left( 1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \\ \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

untuk momentum, dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial Y} + \mathbf{Pr} \frac{\partial u_e}{\partial x} F \frac{\partial S}{\partial Y} = \\ \mathbf{Pr} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

untuk energi, dengan kondisi batas sebagai berikut:

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ saat } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ saat } Y \rightarrow \infty$$

Pada Tugas Akhir ini sudut pengamatannya yaitu  $x \approx 0$  atau dititik stagnasi sehingga nilai

$$u_e(x) = 0 \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{3}{2 \cos \theta_s} \quad (4.62)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)}{u_e} = \frac{2}{3} \quad (4.63)$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (4.61), (4.62), (4.63) ke Persamaan Pembangun untuk *small time* (4.57), (4.58) dan *large time* (4.59), (4.60) sehingga Persamaan Pembangunnya menjadi sebagai berikut:

1. Untuk *small time* ( $t < t^*$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{3t}{2 \cos \theta_s} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = \\ t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} - \frac{25}{16} Mt \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - \frac{3}{2} \alpha t s \end{aligned} \quad (4.64)$$

untuk momentum, dan

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{\mathbf{Pr} \eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{3 \mathbf{Pr} t}{2 \cos \theta_s} f \frac{\partial s}{\partial \eta} = \mathbf{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.65)$$

untuk energi.

Misalkan  $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$  dan  $\frac{\partial s}{\partial \eta} = s'$  sehingga didapat

$$\begin{aligned} f'''' + \frac{\eta}{2} f''' + t \frac{\partial u_e}{\partial x} [1 - (f')^2 + f f''] = \\ t \frac{\partial f'}{\partial t} - \frac{25}{16} Mt (1 - f') - \frac{3}{2} \alpha t s \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$s'' + \frac{\mathbf{Pr} \eta}{2} s' + \frac{3 \mathbf{Pr} t}{2 \cos \theta_s} f s' = \mathbf{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.67)$$

dengan kondisi batas sebagai berikut:

$t < 0$  :  $f = f' = s = 0$  untuk semua  $x, \eta$

$t \geq 0$  :  $f = f' = 0, s = 1$  pada saat  $\eta = 0$

$f' = 1, s = 0$  pada saat  $\eta \rightarrow \infty$

2. Untuk *large time* ( $t > t^*$ )

$$\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left[ 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} - \frac{25}{16} M \left( 1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) + \frac{2}{3} \alpha S \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y} + \frac{3 \mathbf{Pr}}{2 \cos \theta_s} F \frac{\partial S}{\partial Y} = \mathbf{Pr} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.69)$$

Misalkan  $\frac{\partial F}{\partial Y} = F'$  dan  $\frac{\partial S}{\partial Y} = S'$  sehingga didapatkan..

$$F''' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} [1 - (F')^2 + FF''] = \frac{\partial F'}{\partial t} - \frac{25}{16} M(1 - F') + \frac{2}{3} \alpha S \quad (4.70)$$

$$S'' + \frac{3 \mathbf{Pr}}{2 \cos \theta_s} FS' = \mathbf{Pr} S' \quad (4.71)$$

dengan kondisi batas

$$F = F' = 0, S = 1 \text{ saat } Y = 0$$

$$F' = 1, S = 0 \text{ saat } Y \rightarrow \infty$$

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## BAB V

### PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini dibahas penyelesaian dan simulasi numerik dari model matematika dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikroktub di bawah pengaruh medan magnet. Penyelesaian yang digunakan untuk model matematika yang diperoleh adalah dengan menggunakan metode *Keller-Box*. Metode *Keller-Box* adalah metode yang tepat dan efisien untuk penyelesaian persamaan-persamaan magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola di dalam fluida mikroktub di bawah pengaruh medan magnet karena persamaan-persamaan dari sistem tersebut merupakan Persamaan Diferensial Parsial Parabolik.

#### 5.1 Langkah-langkah Metode Keller-Box

Pada langkah pertama, dilakukan proses merubah persamaan-persamaan orde tinggi menjadi persamaan-persamaan orde pertama dan melakukan permisalan fungsi sebagai berikut :

1. Waktu Kecil (*Small Time*)

$$f' = u \quad (5.1)$$

$$f'' = v \quad (5.2)$$

$$s' = q \quad (5.3)$$

Dengan memisalkan Persamaan (5.1), (5.2), (5.3) ke Persamaan (4.68) dan (4.69), maka diperoleh :

$$v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3t}{2\cos\theta_s}(1 - u^2 + fv) + \frac{25}{16}Mt(1 - u) + \frac{3}{2}ats = t \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$q' + \frac{\mathbf{Pr}}{2}\eta q + \frac{3}{2\cos\theta_s}\mathbf{Pr}tfq = \mathbf{Pr}t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.5)$$

2. Waktu Besar (*Large Time*)

$$F' = U \quad (5.6)$$

$$F'' = V \quad (5.7)$$

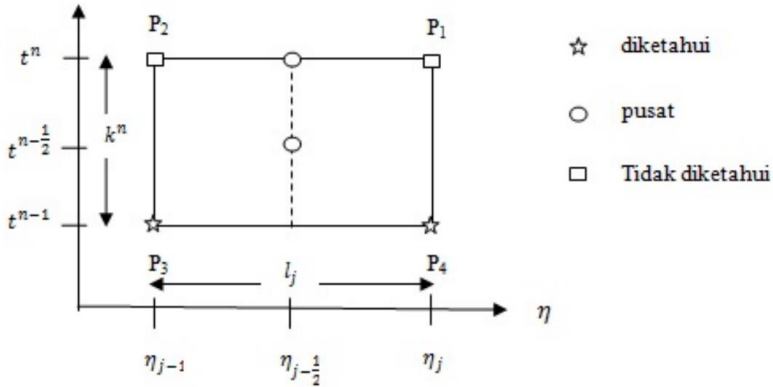
$$S' = Q \quad (5.8)$$

Dengan memisalkan Persamaan (5.6), (5.7), (5.8) ke Persamaan (4.68) dan (4.69), maka diperoleh :

$$V' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} [1 - (U)^2 + FV] = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{25}{16} M(1 - U) + \frac{2}{3} \alpha S \quad (5.9)$$

$$Q' + \frac{3Pr}{2 \cos \theta_s} FQ = Pr \frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.10)$$

Pada langkah kedua dilakukan proses diskritisasi pada model matematika yang diperoleh pada waktu kecil (*Small Time*) dan pada waktu besar (*Large Time*). Pada Persamaan (5.1) sampai dengan (5.3) dan Persamaan (5.6) sampai dengan (5.8) menggunakan titik pusat atau titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$  pada ruas  $P_1P_2$  dengan beda hingga pusat. Sedangkan untuk persamaan-persamaan yang tak linier seperti Persamaan (5.4) sampai dengan (5.5) dan Persamaan (5.9) sampai dengan (5.10) digunakan titik pusat atau titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$  pada segi empat  $P_1P_2P_3P_4$ . Untuk lebih memahami pernyataan di atas lihat Gambar 5.1 berikut.



**Gambar 5.1** Gambar Stensil Beda Hingga

### 1. Diskritisasi Waktu Kecil (*Small Time*)

Hasil dari diskritisasi Persamaan (5.1) sampai dengan (5.3) menggunakan titik tengah  $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right)$  pada ruas  $P_1P_2$  dan Persamaan (5.4) dan (5.5) dengan menggunakan titik tengah  $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}}\right)$  pada segi empat  $P_1P_2P_3P_4$  adalah

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.11)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.12)$$

$$\frac{(s_j^n - s_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n + \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ & + \frac{25}{16} M t^n \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{2}{3} \alpha t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = \\ & - \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\ & - \frac{25}{16} M t^{n-1} \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{2}{3} \alpha t^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n = \\ & - \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ & - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

## 2. Diskritisasi Waktu Besar (*Large Time*)

Hasil dari diskritisasi Persamaan (5.6) sampai dengan (5.8) menggunakan titik tengah  $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right)$  pada ruas  $P_1P_2$  dan Persamaan (5.9) dan (5.10) dengan menggunakan titik tengah  $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}}\right)$  pada segi empat  $P_1P_2P_3P_4$  adalah

$$\frac{(F_j^n - F_{j-1}^n)}{l_j} = U_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.16)$$

$$\frac{(U_j^n - U_{j-1}^n)}{l_j} = V_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.17)$$

$$\frac{(H_j^n - H_{j-1}^n)}{l_j} = Q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\ & + \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left( \frac{V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\ & - \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\ & - \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$- 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n = \\ & - \left( \frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - Pr F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dengan  $l_j$  adalah step size untuk , sedangkan  $k^n$  step size dari waktu dimana

$$()_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [()_j^n + ()_{j-1}^n]$$

$$()_j^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [()_j^n + ()_j^{n-1}]$$

Pada langkah ketiga dilakukan proses pelinieran persamaan-persamaan yang diperoleh dengan menggunakan metode *Newtonian* yang kemudian disajikan dalam bentuk matriks vektor. Persamaan-persamaan yang dimaksud adalah Persamaan (5.11) – (5.20). Sebelum melakukan proses pelinieran, diperkenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut :

1. Pada Waktu Kecil (*Small Time*)

$$\begin{aligned} f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\ u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \\ s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\ q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Kemudian dilakukan substitusi dari bentuk iterasi (5.21) ke sistem Persamaan (5.11) sampai dengan (5.15) dengan menghilangkan orde tinggi pada  $\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta s_j^{(i)}, \delta q_j^{(i)}$ , sehingga diperoleh Persamaan-persamaan sebagai berikut :

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (5.22)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta v_j - \delta v_{j-1}) = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (v_j^n - v_{j-1}^n) \quad (5.23)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta q_j - \delta q_{j-1}) = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (5.24)$$

Dengan memberikan pemisalan pada Persamaan (5.22) sampai dengan (5.24)

$$(r_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n)$$

Sehingga Persamaan (5.22) sampai dengan (5.24) berubah menjadi

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.25)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.26)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.27)$$

Dan untuk Persamaan (5.14) dan (5.15) dilakukan pemisalan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (r_4)_j = & -\left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j}\right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n - \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \\ & - Mt^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + \frac{2}{3}\alpha t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^n \\ & - \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ & - \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \frac{25}{16}Mt^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) \\ & - \frac{2}{3}\alpha t^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_5)_j = & -\left(\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j}\right) - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n - Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& + 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n - \left(\frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& - Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$(a_1)_j = \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_2)_j = (a_1)_j$$

$$(a_3)_j = -\frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{25}{32} M t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = \frac{1}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{4} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_6)_j = -\frac{1}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{4} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_1)_j = \frac{1}{l_j} + \mathbf{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{4} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} \mathbf{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_2)_j = -\frac{1}{l_j} + \mathbf{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{4} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} \mathbf{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_3)_j = \frac{3}{4 \cos \theta_s} \mathbf{Pr} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_4)_j = (b_3)_j$$

$$(b_5)_j = \mathbf{Pr} \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(b_6)_j = (b_5)_j$$

Sehingga diperoleh bentuk

$$(a_1)_j \delta f_j + (a_2)_j \delta f_{j-1} + (a_3) \delta u_j + (a_4)_j \delta u_{j-1} + (a_5)_j \delta v_j + (a_6)_j \delta v_{j-1} = (r_4)_j \quad (5.28)$$

$$(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta v_j + (b_6)_j \delta v_{j-1} = (r_5)_j \quad (5.29)$$

Berdasarkan pada kondisi batas pada (4.66) sampai dengan (4.67), maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta u_N = 0$ , dan  $\delta s_N = 0$ .

## 2. Pada Waktu Besar (*Large Time*)

$$\begin{aligned} F_j^{(i+1)} &= F_j^{(i)} + \delta F_j^{(i)} \\ U_j^{(i+1)} &= U_j^{(i)} + \delta U_j^{(i)} \\ V_j^{(i+1)} &= V_j^{(i)} + \delta V_j^{(i)} \\ S_j^{(i+1)} &= S_j^{(i)} + \delta S_j^{(i)} \\ Q_j^{(i+1)} &= Q_j^{(i)} + \delta Q_j^{(i)} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Kemudian dilakukan substitusi dari bentuk iterasi (5.21) ke sistem Persamaan (5.11) sampai dengan (5.15) dengan menghilangkan orde tinggi pada  $\delta F_j^{(i)}, \delta U_j^{(i)}, \delta V_j^{(i)}, \delta S_j^{(i)}, \delta Q_j^{(i)}$ , sehingga diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta U_j - \delta U_{j-1}) = -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (5.31)$$

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta V_j - \delta V_{j-1}) = -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (V_j^n - V_{j-1}^n) \quad (5.32)$$

$$(\delta H_j - \delta H_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = -(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (Q_j^n - Q_{j-1}^n) \quad (5.33)$$

Dengan memberikan pemisalan pada Persamaan (5.31) sampai dengan (5.33) sebagai berikut:

$$(r_1)_j = -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (U_j^n - U_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (V_j^n - V_{j-1}^n)$$



$$(r_3)_j = -(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n - Q_{j-1}^n)$$

Sehingga Persamaan (5.31) sampai dengan (5.33) berubah bentuknya menjadi

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta U_j - \delta U_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.34)$$

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta V_j - \delta V_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.35)$$

$$(\delta H_j - \delta H_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.36)$$

Dan untuk Persamaan (5.19) dan (5.20) dilakukan pemisalan

$$\begin{aligned} (r_4)_j = & -\left(\frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j}\right) - \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \\ & - \frac{25}{16}M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n\right) - \frac{2}{3}\alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n + 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^n \\ & - \left(\frac{V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) - \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) \\ & - \frac{25}{16}M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - \frac{2}{3}\alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r_5)_j = & -\left(\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j}\right) - PrF_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n + 2\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}S_{j-\frac{1}{2}}^n \\ & - \left(\frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j}\right) - PrF_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2\frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

$$(a_1)_j = \frac{3}{4 \cos \theta_s} V_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_2)_j = (a_1)_j$$

$$(a_3)_j = -\frac{3}{2 \cos \theta_s} U_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{25}{32}M - \frac{1}{k^n}$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = \frac{1}{l_j} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} F_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_6)_j = -\frac{1}{l_j} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} F_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_1)_j = \frac{1}{l_j} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} \mathbf{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_2)_j = -\frac{1}{l_j} + \frac{3}{4 \cos \theta_s} \mathbf{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_3)_j = \frac{3}{4 \cos \theta_s} \mathbf{Pr} Q_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(b_4)_j = (b_3)_j$$

$$(b_5)_j = \frac{\mathbf{Pr}}{k^n}$$

$$(b_6)_j = (b_5)_j$$

Sehingga diperoleh bentuk

$$(a_1)_j \delta F_j + (a_2)_j \delta F_{j-1} + (a_3)_j \delta U_j + (a_4)_j \delta U_{j-1} + (a_5)_j \delta V_j + (a_6)_j \delta V_{j-1} = (r_4)_j \quad (5.37)$$

$$(b_1)_j \delta Q_j + (b_2)_j \delta Q_{j-1} + (b_3)_j \delta F_j + (b_4)_j \delta F_{j-1} + (b_5)_j \delta V_j + (b_6)_j \delta V_{j-1} = (r_5)_j \quad (5.38)$$

Berdasarkan pada kondisi batas pada (4.70) – (4.71), maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta F_0 = 0$ ,  $\delta U_0 = 0$ ,  $\delta S_0 = 0$ ,  $\delta U_N = 0$ , dan  $\delta S_N = 0$ .

Pada langkah keempat, hasil dari proses pelinieran diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal. Persamaan-persamaan dari hasil linierisasi di atas dapat diselesaikan dengan Teknik Eliminasi Blok Tridiagonal yang berupa matriks blok. Hal ini yang merupakan ciri dari penyelesaian dengan metode *Keller-Box*, karena pada penyelesaian dengan matriks tridiagonal, pada umumnya elemen-elemennya berisi konstanta-konstanta. Hasil

dari proses linierisasi tersebut dapat dibentuk matriks blok tridiagonal dengan cara dinyatakan dalam keadaan yaitu saat  $j = 1, j = N - 1$ , dan  $j = N$  sebagai berikut :

Saat  $j = 1$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_j}{2}(\delta u_1 - \delta u_0) = (r_1)_1 \quad (5.39)$$

$$(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_j}{2}(\delta v_1 - \delta v_0) = (r_2)_1 \quad (5.40)$$

$$(\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{l_j}{2}(\delta q_1 - \delta q_0) = (r_3)_1 \quad (5.41)$$

$$(a_1)_1 \delta f_1 + (a_2)_1 \delta f_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_4)_1 \delta u_0 + (a_5)_1 \delta v_1 + (a_6)_1 \delta v_0 = (r_4)_1 \quad (5.42)$$

$$(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta v_1 + (b_6)_1 \delta v_0 = (r_5)_1 \quad (5.43)$$

Dengan kondisi batas  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0$ , maka sistem Persamaan (5.39) sampai dengan (5.43) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_6)_1 & 0 & (a_1)_1 & (a_5)_1 & 0 \\ 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \\ \delta q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{bmatrix}$$

Saat  $j = 1$ , dapat dinyatakan secara sederhana sebagai  $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$ .

Saat  $j = N - 1$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1} \quad (5.44)$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_{N-1} - \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1} \quad (5.45)$$

$$(\delta h_{N-1} - \delta h_{N-2}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_{N-1} - \delta q_{N-2}) = (r_3)_{N-1} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_{N-1}\delta f_{N-1} + (a_2)_{N-1}\delta f_{N-2} + (a_3)\delta u_{N-1} \\ & + (a_4)_{N-1}\delta u_{N-2} + (a_5)_{N-1}\delta v_{N-1} + (a_6)_{N-1}\delta v_{N-2} \\ & = (r_4)_{N-1} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_{N-1}\delta q_{N-1} + (b_2)_{N-1}\delta q_{N-2} + (b_3)_{N-1}\delta f_{N-1} \\ & + (b_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + (b_5)_{N-1}\delta v_{N-1} + (b_6)_{N-1}\delta v_{N-2} \\ & = (r_5)_{N-1} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Persamaan (5.44) sampai dengan (5.48) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_{N-1} & (a_6)_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & 0 & (b_2)_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_4)_{N-1} & 0 & (a_1)_{N-1} & (a_5)_{N-1} & 0 \\ 0 & (b_6)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & 0 & (b_1)_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta s_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{bmatrix}$$

Saat  $j = N - 1$ , dapat dinyatakan secara sederhana sebagai  $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$ .

Saat  $j = N$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_N - \delta u_{N-1}) = (r_1)_N \quad (5.49)$$

$$(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_N - \delta v_{N-1}) = (r_2)_N \quad (5.50)$$

$$(\delta h_N - \delta h_{N-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_N - \delta q_{N-1}) = (r_3)_N \quad (5.51)$$

$$(a_1)_N \delta f_N + (a_2)_N \delta f_{N-1} + (a_3)_N \delta u_N + (a_4)_N \delta u_{N-1} + (a_5)_N \delta v_N + (a_6)_N \delta v_{N-1} = (r_4)_N \quad (5.52)$$

$$(b_1)_N \delta q_N + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N + (b_4)_N \delta f_{N-1} + (b_5)_N \delta v_N + (b_6)_N \delta v_{N-1} = (r_5)_N \quad (5.53)$$

Persamaan (5.49) sampai dengan (5.53) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_N & (a_6)_N & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_N & 0 & (b_2)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_4)_N & 0 & (a_1)_N & (a_5)_N & 0 \\ 0 & (b_6)_N & (b_3)_N & 0 & (b_1)_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{bmatrix}$$

Saat  $j = N$ , dapat dinyatakan secara sederhana sebagai  $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$ .

Sehingga dari ketiga keadaan tersebut ( $j = 1, j = N - 1$ , dan  $j = N$ ) untuk  $j = 1, 2, \dots, N - 1, N$  dapat dinyatakan dalam bentuk sederhana sebagai berikut :

$$\begin{aligned} j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\ j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\ & \vdots \\ j = N - 1 & : [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] \\ & = [r_{N-1}] \\ j = N & : [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N] \end{aligned}$$

Atau dapat pula dinyatakan ke dalam bentuk

$$A\delta = r \quad (5.54)$$

Dengan matriks-matriks  $A$ ,  $\delta$ , dan  $r$  adalah matriks-matriks yang elemen-elemennya adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [A_N] \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{bmatrix}$$

Dari Persamaan (5.54) terlihat bahwa matriks A merupakan matriks tridiagonal yang setiap elemennya bernilai nol, kecuali pada tiga diagonal utamanya. Teknik eliminasi blok digunakan untuk menyelesaikan Persamaan (5.54) dengan cara matriks A yang terbentuk diasumsikan merupakan matriks yang *non singular*. Dari asumsi tersebut, matriks A dapat difaktorkan

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (5.55)$$

dengan matriks L dan matriks U sebagai berikut :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\delta_1] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [\alpha_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & & & [I] \end{bmatrix}$$

Dengan matriks identitas  $[I]$  berdimensi  $5 \times 5$  serta  $[\alpha_j]$  dan  $[\Gamma_j]$  adalah matriks berukuran  $5 \times 5$  dengan setiap elemennya ditentukan oleh persamaan-persamaan berikut :

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [\alpha_1][\Gamma_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], j = 2, 3, \dots, N \\ [\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], j = 2, 3, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Dengan melakukan substitusi Persamaan (5.55) ke Persamaan (5.54) maka diperoleh Persamaan

$$\mathbf{L} \mathbf{U} \delta = \mathbf{r} \quad (5.56)$$

Dengan  $\mathbf{U} \delta = \mathbf{W}$ , maka Persamaan (5.56) menjadi

$$\mathbf{L} \mathbf{W} = \mathbf{r} \quad (5.57)$$

dengan,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{bmatrix}$$

dan  $[W_j]$  merupakan matriks  $5 \times 1$  dengan setiap elemennya diperoleh dari Persamaan (5.57) yaitu

$$[\alpha_1][W_1] = [r_1]$$

$$[\alpha_j][W_j] = [r_j] - [B_j][W_{j-1}], 2 \leq j \leq N$$

Kemudian diperoleh setiap elemen dari matriks  $\mathbf{W}$ , sehingga dapat diperoleh penyelesaian dari  $\delta$  pada Persamaan  $\mathbf{U} \delta = \mathbf{W}$  dengan menggunakan Persamaan di bawah ini

$$[\delta_j] = [W_j]$$

$$[\alpha_j] = [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], 1 \leq j \leq N - 1$$

Setelah diperoleh nilai  $\delta$ , maka Persamaan (5.49) sampai dengan (5.53) dapat dipakai untuk memperoleh solusi dari Persamaan  $\mathbf{U} \delta = \mathbf{W}$  dengan menjalankan iterasi sampai kriteria konvergensi terpenuhi. Dengan kriteria konvergensi  $v(0, t)$  dan iterasi berhenti pada  $|\delta v(0, t)| < \epsilon$  dengan sebarang nilai  $\epsilon > 0$  yang sangat kecil dan  $\epsilon$  yang digunakan adalah  $10^{-5}$ .

## 5.2 Hasil Simulasi Numerik

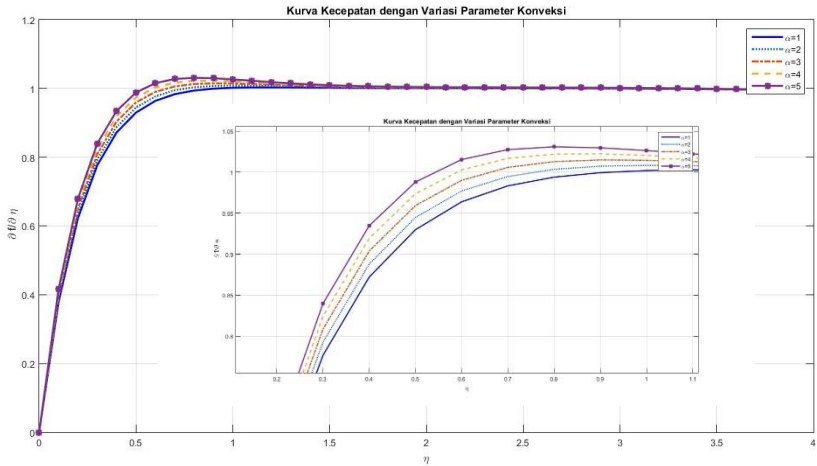
Pada SubBab 5.1 telah dilakukan penyelesaian dari model matematika yang diperoleh dari permasalahan magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah



pengaruh medan magnet dengan metode Keller-Box. Selanjutnya dilakukan simulasi dengan memberikan inputan beberapa variasi yaitu variasi magnetik ( $M$ ), variasi irisan ( $\theta$ ), variasi konveksi ( $\alpha$ ), dan variasi bilangan Prandtl pada titik stagnasi terendah yakni  $x = 0^\circ$ . Dilakukan simulasi numerik bertujuan untuk mengetahui bagaimana profil kecepatan dan profil temeperatur dari pengaruh variasi berbagai kondisi.

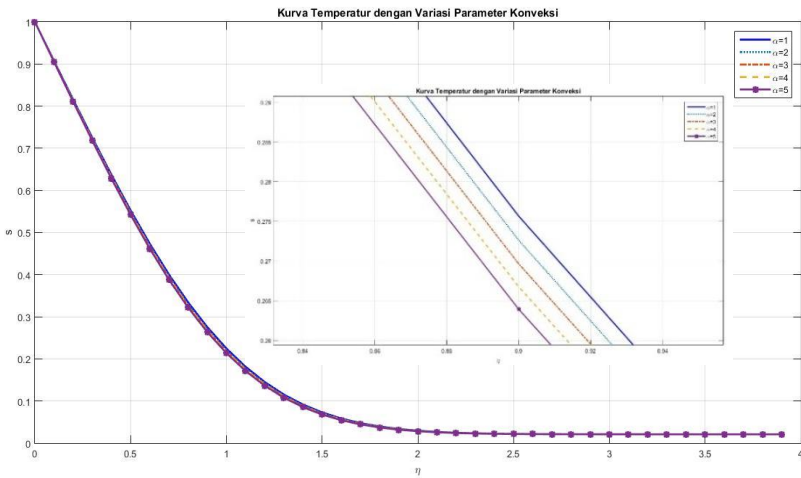
### 5.2.1 Pengaruh Variasi Parameter Konveksi

Variasi parameter konveksi yang digunakan pada simulasi ini yaitu  $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ , nilai parameter lain yang digunakan adalah  $M = 10$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\theta_s = 30^\circ$ , banyak partisi  $\eta = 40$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 33$  dengan  $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$  dan  $t = 1.65$ . Hasil simulasinya sebagai berikut



**Gambar 5.2** Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi( $\alpha$ ),  $Pr=0.7$ ,  $\theta_s = 45^\circ$  dan  $M = 10$

Berdasarkan Gambar 5.2, mulai dari  $f' = 0$  sampai  $f' \approx 1$  kurva mengalami peningkatan. Dengan digunakannya variasi parameter konveksi, kecepatan mengalami peningkatan lebih signifikan sebanding dengan parameter variasi yang digunakan. Hal ini diakibatkan dengan meningkatnya parameter konveksi akan meningkatkan gaya apung fluida. Gaya apung fluida akan mempengaruhi momentum fluida yang juga akan meningkatkan kecepatan fluida.



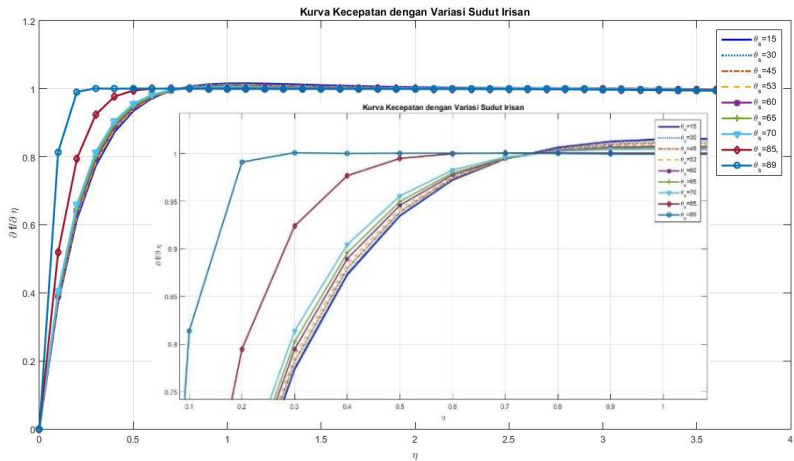
**Gambar 5.3** Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi( $\alpha$ ),  $Pr=0.7, \theta_s = 45^\circ$  dan  $M = 10$

Berdasarkan Gambar 5.3, mulai dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$  kurva mengalami penurunan. Dengan digunakannya variasi parameter konveksi, temperatur mengalami penurunan lebih cepat dengan digunakan variasi parameter konveksi lebih tinggi. Secara matematis hal ini terjadi akibat  $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$ . Pada  $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$  ditunjukkan bahwa  $(\alpha \sim Gr)$ . Bilangan Grashof sendiri dapat dinyatakan dengan  $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{v^2}$ , yang berarti bahwa  $\alpha \sim Gr \sim (T_w - T_\infty)$ .

Penurunan temperatur terjadi karena  $(T_w - T_\infty)$  semakin besar. Dengan  $T_w$  nilainya tetap, maka temperatur fluida semakin kecil.

### 5.2.2 Pengaruh Variasi Parameter Sudut Irisan $\theta_s$

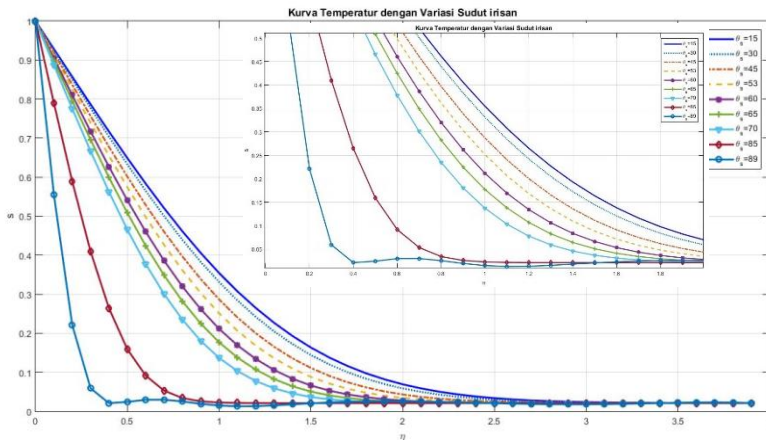
Variasi parameter sudut irisan yang digunakan pada simulasi ini yaitu  $\theta_s = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 53^\circ, 60^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 85^\circ, 89^\circ$ , nilai parameter lain yang digunakan adalah  $M = 10$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $\alpha = 2$ , banyak partisi  $\eta = 40$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 33$  dengan  $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$  dan  $t = 1.65$ . Hasil simulasinya sebagai berikut



**Gambar 5.4** Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Sudut Irisan( $\theta_s$ ),  $Pr=0.7$ ,  $\alpha = 2$  dan  $M = 10$

Berdasarkan Gambar 5.4, mulai dari  $f' = 0$  sampai  $f' \approx 1$  kurva mengalami peningkatan. Dengan digunakannya variasi parameter  $\theta_s$ , kecepatan mengalami peningkatan lebih signifikan sebanding dengan parameter variasi yang digunakan. Namun jika diperhatikan setelah kurva maksimal yang dicapai berbanding terbalik terhadap besar  $\theta_s$  yang diberikan. Hal ini akan sesuai jika

dianalisis bahwa  $\frac{3t}{2 \cos \theta_s}$  pada persamaan momentum meningkat maka  $\cos \theta_s$  semakin kecil, maka akan mengakibatkan nilai  $\frac{3t}{2 \cos \theta_s}$  semakin besar, sehingga momentumnya akan bertambah yang juga menyebabkan kecepatan fluida semakin meningkat.

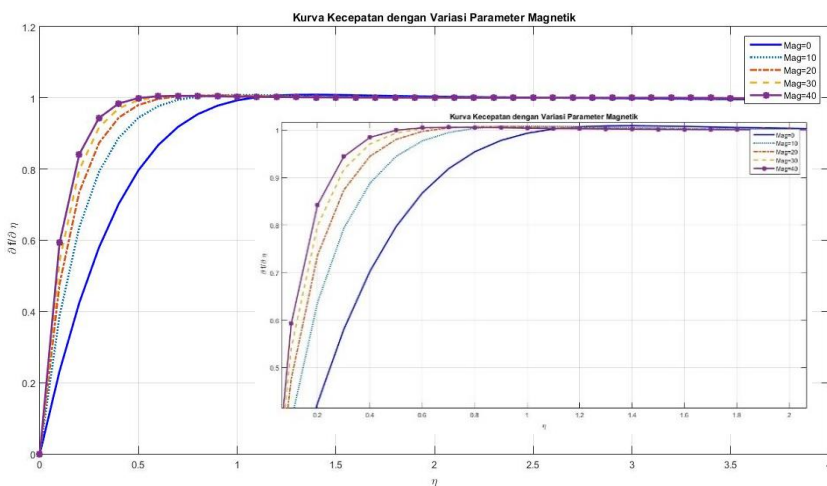


**Gambar 5.5** Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Sudut Irisan( $\theta_s$ ),  $Pr=0.7, \alpha = 2$  dan  $M = 10$

Berdasarkan Gambar 5.5, mulai dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$  kurva mengalami penurunan. Dengan digunakannya variasi parameter konveksi, temperatur mengalami penurunan lebih cepat dengan digunakan variasi parameter  $\theta_s$  lebih besar. Hal ini terjadi Karena semakin besar sudut irisan bola maka permukaan depan semakin luas yang mengakibatkan distribusi panas ke bola semakin cepat dibandingkan dengan distribusi panas fluidanya sehingga temperatur semakin menurun.

### 5.2.3 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik( $M$ )

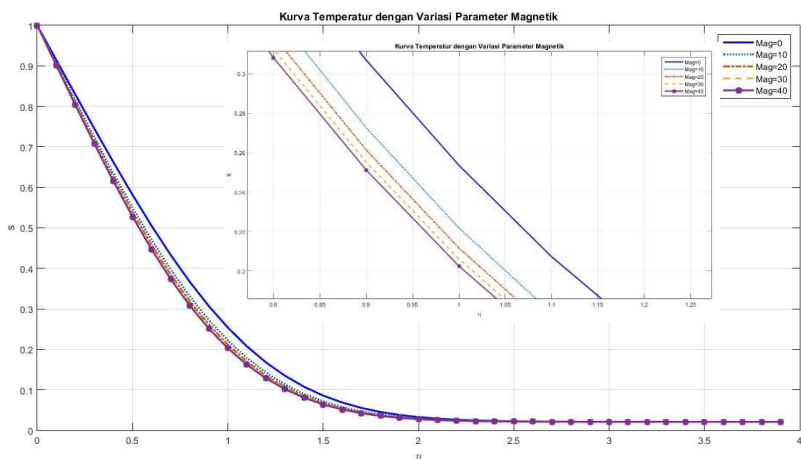
Variasi parameter magnetik yang digunakan pada simulasi ini yaitu = 0,10,20,30,40 , nilai parameter lain yang digunakan adalah  $\alpha = 2$ ,  $\text{Pr} = 0,7$ ,  $\theta_s = 30^\circ$ , banyak partisi  $\eta = 40$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 33$  dengan  $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$  dan  $t = 1.65$ . Hasil simulasinya sebagai berikut



**Gambar 5.6** Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik( $M$ ),  $\text{Pr}=0.7$ ,  $\alpha = 2$  dan  $\theta_s = 45^\circ$

Berdasarkan Gambar 5.6, mulai dari  $f' = 0$  sampai  $f' \approx 1$  kurva mengalami peningkatan . Dengan digunakannya variasi parameter  $\theta_s$ , kecepatan mengalami peningkatan lebih signifikan sebanding dengan parameter variasi yang digunakan. Secara matematis  $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty}$  yang berarti dengan bertambahnya medan magnet maka densitas akan berkurang sehingga hambatan akibat

gaya antar partikel akan berkurang membuat kecepatan semakin bertambah.

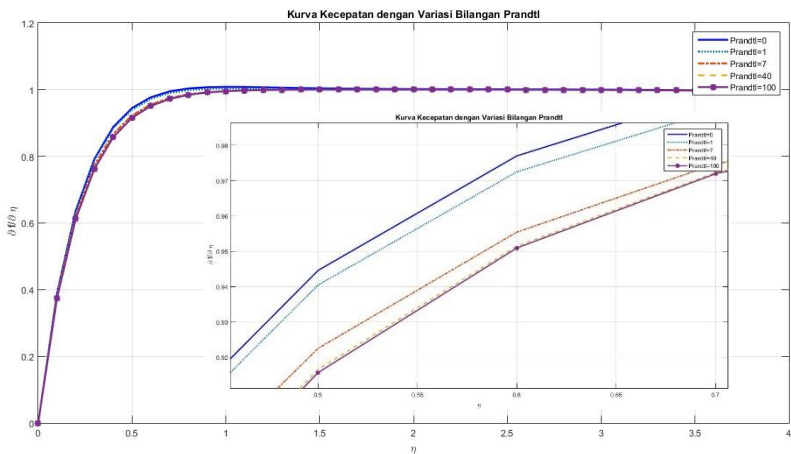


**Gambar 5.7** Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik( $M$ ),  $Pr=0.7$ ,  $\alpha = 2$  dan  $\theta_s = 45^\circ$

Berdasarkan Gambar 5.7, mulai dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$  kurva mengalami penurunan. Dengan digunakannya variasi parameter magnetik, temperatur mengalami penurunan lebih cepat pada parameter magnetik yang semakin besar. Hal ini terjadi karena energi internal fluida semakin bertambah karena pengaruh medan magnet dan densitas yang berkurang sebagai akibat bertambahnya parameter magnetik. Dengan bertambahnya energi internal maka energi yang digunakan fluida untuk bergerak berkurang, demikian juga dengan densitas yang berkurang artinya kerapatan molekul fluida berkurang sehingga distribusi panas antar fluida berkurang. Ini berakibat temperatur mengalami penurunan seiring bertambahnya parameter magnetik.

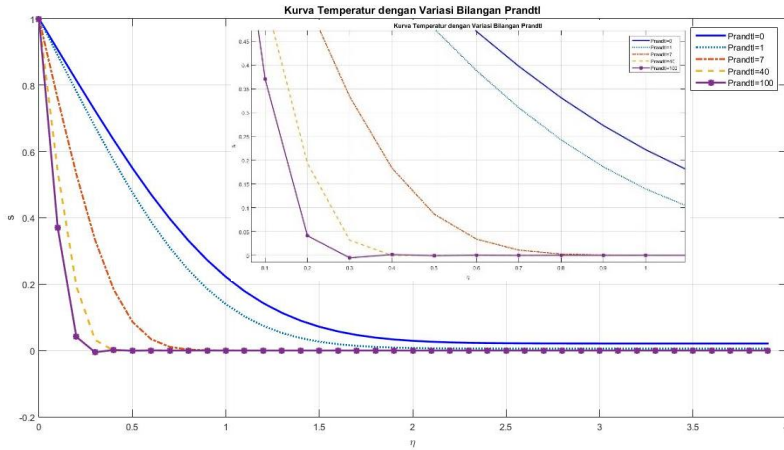
#### 5.2.4 Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl (Pr)

Variasi bilangan Prandtl yang digunakan pada simulasi ini yaitu  $0, 1, 7, 40, 100$ , nilai parameter lain yang digunakan adalah  $\alpha = 2$ ,  $M = 10$ ,  $\theta_s = 30^\circ$ , banyak partisi  $\eta = 40$  dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t = 33$  dengan  $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$  dan  $t = 1.65$ . Hasil simulasinya sebagai berikut



**Gambar 5.8** Kurva Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl( $\text{Pr}$ ), dengan  $\theta_s = 45^\circ$ ,  $\alpha = 2$  dan  $M = 10$ .

Berdasarkan Gambar 5.8, mulai dari  $f' = 0$  sampai  $f' \approx 1$  kurva mengalami peningkatan. Dengan digunakannya variasi Bilangan Prandtl temperatur mengalami penurunan lebih cepat pada Bilangan Prandtl yang semakin besar. Hal ini terjadi karena secara matematis  $\text{Pr} = \frac{\nu \rho C_p}{c}$  yang berarti bahwa bilangan Prandtl sebanding dengan densitas fluida ( $\text{Pr} \sim \rho$ ). Jadi jika bilangan Prandtl bertambah maka densitas fluida semakin meningkat. Sehingga hal inilah yang mengakibatkan kecepatan fluida mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya bilangan Prandtl.



**Gambar 5.9** Kurva Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl( $Pr$ ), dengan  $\theta_s = 45^\circ$ ,  $\alpha = 2$  dan  $M = 10$ .

Berdasarkan Gambar 5.9, mulai dari  $s = 1$  sampai  $s \approx 0$  kurva mengalami penurunan. Dengan digunakannya variasi parameter magnetik, temperatur mengalami penurunan lebih cepat sebanding dengan bilangan Prandtl yang semakin besar. Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl, kurva temperatur semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl. Hal ini terjadi karena secara matematis  $Pr = \frac{v\rho C_p}{c}$  yang artinya bilangan Prandtl merupakan perbandingan viskositas kinematika dengan difusivitas termal. Viskositas kinematika berkaitan dengan kecepatan perpindahan antara molekul, sedangkan difusivitas termal berkaitan dengan perbandingan penerusan panas dengan kapasitas penyimpanan energi molekul. Semakin besar bilangan Prandtl mengakibatkan difusivitas termal semakin kecil karena bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan difusivitas termal. Ini berarti bahwa dengan bertambahnya bilangan Prandtl maka distribusi panas antar fluida berkurang atau dapat dikatakan perpindahan panas ke permukaan



benda lebih cepat dari pada fluidanya sehingga mengakibatkan temperatur fluida semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB VI**

### **PENUTUP**

Pada bab ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan. Kemudian diberikan pula saran untuk penelitian selanjutnya.

#### **6.1 Kesimpulan**

Berdasarkan analisis, pembahasan, serta simulasi numerik dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Model matematika magnetohidrodinamik yang tak tunak pada konveksi campuran yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet didapatkan seperti apa yang sudah dikerjakan pada bab sebelumnya.
2. Penyelesaian model matematika magnetohidrodinamik yang tak tunak pada konveksi campuran yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet telah didapat secara numerik dengan Metode *Keller-Box*
3. Parameter magnetik ( $M$ ), parameter konveksi ( $\alpha$ ) dan besar sudut irisan bola ( $\theta_s$ ) berbanding lurus dengan kecepatan fluida. Sedangkan, parameter magnetik ( $M$ ), parameter konveksi ( $\alpha$ ), besar sudut irisan bola ( $\theta_s$ ) berbanding terbalik dengan temperatur fluida. Sedangkan bilangan Prandtl berbanding terbalik terhadap kecepatan fluida dan berbanding lurus terhadap temperature fluida.
4. Setiap kurva percobaan pada semua parameter dengan setiap nilai parameter yang diberikan mengalami steady state pada  $\eta \leq 3$ .

## 6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan pada permasalahan ini, saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah:

1. Melakukan studi dengan menggunakan persamaan induksi  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ .
2. Melakukan studi tidak pada titik stagnasi dengan bola yang bermuatan magnet dan fluida yang terinduksi magnet dari bola.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2015a). *“Numerical Solution of Heat Transfer Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past a Sphere”*. International Journal of Far East Journal of Mathematical Sciences-Puspha Publishing House-India.
- [2] Irianto, S.(2013), *“Kombinasi Operasi PLTU - MHD - Fuel Cell Dan Kemungkinan Penerannya Di Indonesia”*. Thesis. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [3] Makinde,O.D., Bég,O.A., dan Takhar,H.S.(2009). *“Magnetohydrodynamic Viscous Flow In Rotating Porous Medium Cylindrical Annulus With An Applied Radial Magnetic Field”*. International Journal of Applied Mathematics and Mechanical Engineering 5 (6): 68-81.
- [4] Wijaya I. G. E. P. (2016). *“Magnetohidrodinamik Fluida Kental Tak Tunak dengan Konveksi Paksa yang Mengalir Melewati Bola Teriris”*. Tesis. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [5] Khalimah, D.A. (2015). *“Analisis Aliran Tak Tunak Konveksi Paksa Fluida Kental Magnetohidrodinamik (MHD) Melewati Silinder Eliptik”*. Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [6] Mohamed, M.K.A, B., Salleh, M.Z., Hussanan, A., Sarif, N.Md., Nor, A.Z.Md.N., Ishak, Anuar., dan Nugroho, A. (2007). *Studi Eksperimental Tentang Karakteristik Aliran Fluida Melintasi Silinder Sirkular teriris tipe D (Studi Kasus Untuk Pengaruh Gap 76 Ratio Silinder Teriris terhadap endwall (00.4))*. Tugas Akhir, Teknik Mesin, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [7] Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2015b). *The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady*

- Magnetohydrodynamic Boundary Layer Flow Of A Viscous Fluid Past A Sphere*. International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE), Kuala Lumpur, Malaysia, 16 Oktober 2015.
- [8] Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, G.O., Rahayuningsih, T., dan Purbandini. (2016a). "Viscoelastic Fluid Flow Pass A Porous Circular Cylinder When The Magnetic Field Included". *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, Vol 99, No. 2, hal. 173-186. 77
- [9] Widodo, B., Anggriani, I., Khalimah, D.A, Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2016b). "Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics In Micropolar Fluid Past A Sphere, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, Vol 100, No. 2, hal. 291-299.
- [10] Elseth, G. (2001). An Experimental Study Of Oil/Water Flow In Horizontal Pipes. Thesis. Porsgrunn : Telemark University College.
- [11] Pritchard, P.J. dan Leylegian, J.C. , (2011) . Introduction To Fluid Mechanics. JOHN WILEY & SONS, INC.: United States of America.
- [12] Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, ITSPress, Surabaya.
- [13] Walujodjati, A. (2006). Perpindahan Panas Konveksi Paksa. Tugas Akhir. Semarang. Universitas Wahid Hasyim Semarang.
- [14] Waini, I., Shafie, S. , Masran, M.H. dan Muhamad, W.Z.A.W. (2012), "Boundary Layer Flow Of A Nanofluid Over A Continuous Stretching Surface In The Presence Of Magnetic And Chemical Reaction Effects". *Proceedings of 2nd Regional Conference on Applied and Engineering Mathematics (RCAEM-II)*
- [15] Arber, T. (2013), "Fundamental of Magnetohydrodynamics (MHD)", Lecture handout : University of Warwick, UK. Favre,

- M. dan Tardu, S. (2009), *Convective Heat Transfer*, Wiley, United States Of America.
- [16] Al-Shibani, F.S. , Md. Ismail, A.I. dan Abdullah, F.A. (2012), “The Implicit Keller Box Method for The One Dimensional Time Fractional Diffusion Equation”. *Journal of Applied Mathematics & Bioinformatics*, Vol. 2, No. 3, 69-84

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## LAMPIRAN A

### Penurunan Persamaan Komponen Tegangan Normal, Tegangan Geser, Gravitasi Pada Penyelesaian Persamaan Momentum Sumbu $x$ , $y$ dan Kecepatan Aliran Bebas

Turunan  $\sigma_{xx}$  terhadap  $x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Turunan  $\sigma_{yy}$  terhadap  $y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Turunan  $\tau_{xy}$  terhadap  $x$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)\end{aligned}$$

Turunan  $\tau_{yx}$  terhadap  $y$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}$$

## LAMPIRAN A LANJUTAN

Sehingga gaya permukaan yang berupa

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \hat{j}$$

dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \hat{i} \\ & + \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \hat{j} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan kontinuitas  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , atau yang bisa dituliskan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Sehingga gaya permukaannya dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \hat{i} \\ & + \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \hat{j} \\ & = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \hat{j} \end{aligned}$$

Pada ruas kiri dapat dikelompokkan agar bisa ditulis menjadi lebih sederhana sebagai berikut:

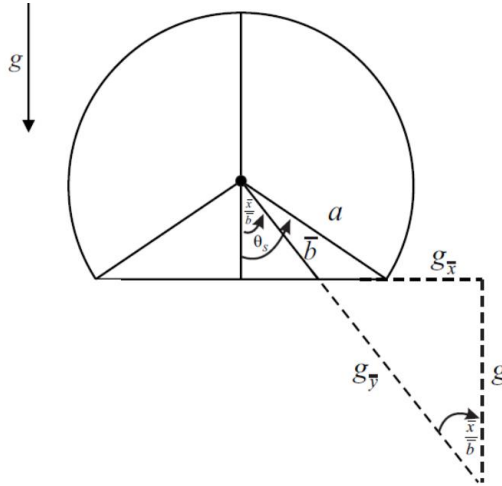
$$-\left( \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \hat{j}$$

yang kemudian dituliskan

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 u$$

## LAMPIRAN A LANJUTAN

Didasarkan pada kondisi pada gambar dibawah ini dapat ditentukan  $g_{\bar{x}}$  dan  $g_{\bar{y}}$



$$\cos\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right) = \frac{g}{g_{\bar{y}}}$$

$$g_{\bar{y}} = \frac{g}{\cos\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right) = \frac{g_{\bar{x}}}{g}$$

$$g_{\bar{x}} = g \tan\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)$$

Bentuk  $g_{\bar{x}}$  dan  $g_{\bar{y}}$  dapat diubah menjadi bentuk non-dimensional dengan mensubstitusikan nilai b

$$g_{\bar{y}} = \frac{g}{\cos\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)}$$

$$g_{\bar{x}} = g \tan\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)$$

$$g_{\bar{y}} = \frac{g}{\cos\left(\frac{ax}{ab}\right)}$$

$$g_{\bar{x}} = g \tan\left(\frac{ax}{ab}\right)$$

$$g_{\bar{y}} = \frac{g}{\cos\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)}$$

$$g_{\bar{x}} = g \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)$$

## LAMPIRAN A LANJUTAN

Dengan mengacu pada Anderson (2011) dan dilakukan modifikasi dengan mensubstitusikan  $b = \frac{\cos \theta_s}{\cos x}$ , maka kecepatan aliran bebas untuk bola teriris

$$\bar{U}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)$$

Kemudian diubah menjadi bentuk non-dimensional

$$u_e U_\infty = \frac{3}{2} U_\infty \sin\left(\frac{ax}{ab}\right)$$

$$u_e = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \left(\frac{\cos x}{\cos \theta_s} - \frac{x \sin x}{\cos \theta_s}\right)$$

## LAMPIRAN B

### Transformasi Persamaan Pembangun ke Persamaan Non-Dimensional

Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial\bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial(aruU_\infty)}{\partial(xa)} + \frac{\partial\left(arvU_\infty Re^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial\left(yaRe^{\frac{1}{2}}\right)} &= 0 \\ \frac{aU_\infty}{a} \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{aU_\infty Re^{\frac{1}{2}}}{aRe^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\ U_\infty \frac{\partial(ru)}{\partial x} + U_\infty \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Persamaan Momentum arah sumbu- $x$

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &\quad - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{u} - \rho \beta g (\bar{T} - T_\infty) \tan\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)\end{aligned}$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left( \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(taU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xa)} + vU_\infty Re^{\frac{1}{2}} \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ayRe^{\frac{1}{2}})} \right) \\ &= \rho \left( \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

## LAMPIRAN B LANJUTAN

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{u} - \rho \beta g (\bar{T} - T_\infty) \tan \left( \frac{\bar{x}}{\bar{b}} \right) \\
 & = -\frac{\partial (p \rho U_\infty^2)}{\partial (x a)} + \mu \left( \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial (a x)^2} + \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial \left( a y Re^{-\frac{1}{2}} \right)^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 u U_\infty \\
 & \quad - \rho \beta g T (T_w - T_\infty) \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
 & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{U_\infty}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 u U_\infty \\
 & \quad - \rho \beta g T (T_w - T_\infty) \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
 & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U_\infty}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 u U_\infty \\
 & \quad - \rho \beta g T (T_w - T_\infty) \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

Ruas Kiri = Ruas Kanan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U_\infty}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 & \quad - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 u U_\infty - \rho \beta g T (T_w - T_\infty) \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

Ruas kiri dan kanan dibagi dengan  $\left( \rho \frac{U_\infty^2}{a} \right)$  diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} & = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho U_\infty a} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma a}{\rho U_\infty} \frac{25}{16} B_0^2 u \\
 & \quad - \frac{a}{U_\infty^2} \beta g T (T_w - T_\infty) \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN B LANJUTAN

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{U_\infty a} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} \left( \frac{\sigma a B_0^2}{\rho U_\infty} \right) u \\ & + \frac{a}{U_\infty^2} \beta g T (T_w - T_\infty) \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{25}{16} Mu + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & - \frac{25}{16} Mu + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \end{aligned}$$

Persamaan Momentum arah sumbu-y

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\rho \beta g (\bar{T} - T_\infty)}{\cos \left( \frac{\bar{x}}{\bar{b}} \right)} \end{aligned}$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \\ = & \rho \left( \frac{\partial \left( v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial (ta U_\infty^{-1})} + u U_\infty \frac{\partial \left( v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial (xa)} + v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \left( v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial (ay Re^{-\frac{1}{2}})} \right) \\ = & \rho \left( Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial v}{\partial t} + Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial v}{\partial x} + Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ = & \rho Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

## LAMPIRAN B LANJUTAN

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\rho \beta g (\bar{T} - T_\infty)}{\cos \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)} \\
 & = -\frac{\partial (p \rho U_\infty^2)}{\partial \left( y a Re^{-\frac{1}{2}} \right)} + \mu \left( \frac{\partial^2 \left( v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial (ax)^2} + \frac{\partial^2 \left( u U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial \left( ay Re^{-\frac{1}{2}} \right)^2} - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 v U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 & \quad - \frac{\rho \beta g T (T_w - T_\infty)}{\cos \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)} \\
 & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{U_\infty}{R} e^{-\frac{1}{2}} a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty Re^{-\frac{1}{2}}}{a^2 Re^{-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 & \quad - \frac{25}{16} U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \sigma B_0^2 v - \frac{\rho \beta g T (T_w - T_\infty)}{\cos \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)} \\
 & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \rho \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 & \quad - \frac{25}{16} U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \sigma B_0^2 v - \frac{\rho \beta g T (T_w - T_\infty)}{\cos \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)}
 \end{aligned}$$

Ruas Kiri = Ruas Kanan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \rho Re^{-\frac{1}{2}} \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 & = \rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \rho \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} U_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \sigma B_0^2 v \\
 & \quad - \frac{\rho \beta g T (T_w - T_\infty)}{\cos \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)}
 \end{aligned}$$



## LAMPIRAN B LANJUTAN

Ruas kiri dan kanan dibagi dengan  $\left(\frac{\rho U_\infty^2}{a Re^{-\frac{1}{2}}}\right)$  diperoleh

$$\begin{aligned} & Re^{-1} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{Re^{-1}}{\rho a U_\infty} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} \frac{a Re^{-1}}{\rho U_\infty} \sigma B_0^2 v \\ &\quad - \frac{a Re^{-\frac{1}{2}}}{U_\infty^2 \cos\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)} \beta g T (T_w - T_\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v \rho Re^{-1}}{U_\infty a \rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} Re^{-1} \left( \frac{\sigma a B_0^2 v}{\rho U_\infty} \right) v - \alpha Re^{-\frac{1}{2}} T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-1} Re^{-1} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{+} Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} Re^{-1} M v - \frac{\alpha Re^{-\frac{1}{2}} T}{\cos\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{v \rho Re^{-1}}{a \rho U_\infty} \right) + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} Re^{-1} M v - \frac{\alpha Re^{-\frac{1}{2}} T}{\cos\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v - \frac{\alpha T}{Re^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)} \end{aligned}$$

## LAMPIRAN B LANJUTAN

### Persamaan Energi

$$\rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = c \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned} & \rho C_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \\ &= \rho C_p \left( \frac{\partial (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (taU_\infty^{-1})} \right) + uU_\infty \frac{\partial (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ax)} \\ & \quad + vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ayRe^{-\frac{1}{2}})} \\ &= \rho C_p (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & \quad + \rho C_p \frac{U_\infty}{a} \left( \frac{\partial T_\infty}{\partial t} + u \frac{\partial T_\infty}{\partial x} + v \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Karena  $T_\infty$  adalah suatu konstanta maka  $\frac{\partial T_\infty}{\partial t} = 0$ , sehingga ruas kiri menjadi

$$\rho C_p (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned} & c \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &= c \left( \frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ax)^2} + \frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ayRe^{\frac{1}{2}})^2} \right) \\ &= c \left( \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ &= c \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

## LAMPIRAN B LANJUTAN

Ruas kiri = ruas kanan, sehingga diperoleh

$$\rho C_p (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Ruas kiri dan kanan dibagi dengan  $\frac{\rho C_p (T_w - T_\infty) U_\infty}{a}$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{c}{a U_\infty \rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{c}{a U_\infty \rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{c Re}{a U_\infty \rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ &= \frac{c}{v Re \rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{c Re}{v Re \rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN C

### Perhitungan Persamaan Similaritas

Dengan menggunakan fungsi alir

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dimana variabel similaritas yaitu

*Small time*

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \quad T = s(x, \eta, t) \quad \eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}$$

*Large time*

$$\psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t) \quad T = S(x, Y, t) \quad Y = y$$

sehingga diperoleh

*Small time*

Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(\partial\psi)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(\partial\psi)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(\partial\psi)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\partial\psi)}{\partial x \partial y}$$

Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u - u_e) \\ &+ \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \end{aligned}$$

Ruas Kiri

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
 & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u - u_e) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

Ruas kiri=ruas kanan

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
 \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{1}{2} y t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
 &= t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
 &= u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \left( t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \right)}{\partial x} \\
 &= t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial (u_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial x} \\
 &= t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial (u_e(x) r(x))}{\partial x} f(x, \eta, t) + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\
 &= t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) \left( \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \right) \\
 &\quad + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\
 &= r(x) t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + u_e(x) t^{\frac{1}{2}} f(x, \eta, t) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \\
 &\quad + t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{1}{t} u_e(x) r(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
 &= \frac{\partial u_e(x) r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
 &= \left( \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \right) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
 &\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \\
 &= r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\
 &\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}
 \end{aligned}$$



## LAMPIRAN C LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
 &= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left( -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} \\
 &= -\frac{u_e(x) r(x) \eta}{t} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{2 \partial \eta^2} - u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}
 \end{aligned}$$

Untuk selanjutnya dapat dituliskan  $u_e(x) = u_e$ ,  $r(x) = r$ ,  $f(x, \eta, t) = f$ , sehingga persamaan similaritas untuk persamaan momentum yaitu

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
 &= \frac{1}{r} \left( -\frac{u_e r \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{r^2} \left( t^{\frac{1}{2}} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} + t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e r \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{u_e r \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + \frac{1}{r^2} u_e r^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} (u_e)^2 r \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} (u_e)^2 r^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} (u_e)^2 r^2 \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
 &\quad - t^{\frac{1}{2}} f r \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{1}{r} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} - t^{\frac{1}{2}} f u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{1}{r} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} - t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e \frac{1}{r} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r} (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
 &\quad + (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} (u_e)^2 \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
 &\quad - f (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
 &= -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \\
 &\quad - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - f (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
 \end{aligned}$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
 &u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{1}{t} u_e r \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} - \frac{25}{16} M \left( u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

Ruas kiri = ruas kanan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 &-\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{r} (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\
 &+ (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - f (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} - \frac{25}{16} M \left( u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

kedua ruas dibagi dengan  $u_e/t$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \\ &= t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - \frac{25}{16} M t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\ & \quad - \alpha t s \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \end{aligned}$$

Persamaan Energi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left( -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

Untuk selanjutnya dapat dituliskan bahwa  $s(x, \eta, t) = s$  sehingga persamaan similaritas untuk energi yaitu

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{r} \left( r t^{\frac{1}{2}} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e t^{\frac{1}{2}} f \frac{\partial r}{\partial x} t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial s}{\partial \eta} & \\
 & = \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} - \frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} \\
 & \quad - \left( f \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{1}{r} f \frac{\partial r}{\partial x} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial s}{\partial \eta} & \\
 & = \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}
 \end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan  $Pr t$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 & -Pr \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t \frac{\partial s}{\partial t} + Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - Pr t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - Pr t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \\
 & = \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{Pr \eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + Pr t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \\
 & = Pr t \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right]
 \end{aligned}$$

*Large time*

Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \\
 & \frac{\partial(\partial\psi)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(\partial\psi)}{\partial x \partial y} = 0 \\
 & \frac{\partial(\partial\psi)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\partial\psi)}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

Persamaan Momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u - u_e) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u - u_e) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\ = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\ = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)\end{aligned}$$

Ruas kiri=ruas kanan

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} (u_e(x) r(x) F(x, Y, t)) \\ &= u_e(x) r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \\ &= u_e(x) r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y}\end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= u_e(x)r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \\
 &= u_e(x)r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \\
 &= \frac{\partial(u_e(x)r(x))}{\partial x} F(x, Y, t) + u_e(x)r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial x} \\
 &= F(x, Y, t) \left( \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \right) \\
 &\quad + u_e(x)r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial x} \\
 &= r(x) F(x, Y, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + u_e(x) F(x, Y, t) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \\
 &\quad + u_e(x)r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial Y} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \right) \\
 &= u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial Y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial Y} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial Y^2} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial Y} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial Y^2} \right) \\
 &= u_e(x)r(x) \frac{\partial^3 F(x, Y, t)}{\partial Y^3}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \right) \\
 &= \frac{\partial u_e(x) r(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial x \partial Y} \\
 &= \left( \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)}{\partial x} u_e(x) \right) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \\
 &\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial x \partial Y} \\
 &= r(x) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} + u_e(x) \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \\
 &\quad + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial x \partial Y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \right) \\
 &= u_e(x) r(x) \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial F(x, Y, t)}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial t \partial Y} \\
 &= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial Y^2} \frac{\partial Y}{\partial t} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial t \partial Y} \\
 &= u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 F(x, Y, t)}{\partial t \partial Y}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

Untuk selanjutnya dapat dituliskan  $u_e(x) = u_e, r(x) = r, F(x, Y, t) = F$  sehingga persamaan similaritas untuk persamaan momentum yaitu

Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
 &= \frac{1}{r} \left( u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{r^2} u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \left( \frac{\partial u_e}{\partial x} r \frac{\partial F}{\partial Y} + u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial Y} + u_e r \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} \right) \\
 & \quad - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \left( u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \\
 & \quad - \frac{1}{r^2} \left( F r \frac{\partial u_e}{\partial x} + F u_e \frac{\partial r}{\partial x} + u_e r \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial Y} u_e r \\
 &= -u_e \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + u_e \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + \frac{1}{r} (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \\
 & \quad + (u_e)^2 \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} (u_e)^2 \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 - u_e F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\
 & \quad - F (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\
 &= -u_e \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + u_e \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + (u_e)^2 \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} \\
 & \quad - u_e F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - F (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}
 \end{aligned}$$

Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
 & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha S \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} - \frac{25}{16} M \left( \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} - u_e \right) + \alpha S \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} - \frac{25}{16} M \left( u_e \frac{\partial F}{\partial Y} - u_e \right) + \alpha S \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$



## LAMPIRAN C LANJUTAN

Ruas kiri = ruas kanan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 & -u_e \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + u_e \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + \frac{1}{r} (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 \\
 & \quad + (u_e)^2 \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} \\
 & -F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - F (u_e)^2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \frac{1}{r} - (u_e)^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \\
 & = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} - \frac{25}{16} M \left( u_e \frac{\partial F}{\partial Y} - u_e \right) + \alpha S \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan  $u_e$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[ 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] \\
 & = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) - \frac{25}{16} M \left( 1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \\
 & \quad - \alpha S \tan \left( \frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

Persamaan Energi

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial S(x, Y, t)}{\partial Y} \\
 \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial S(x, Y, t)}{\partial Y} \\
 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 S(x, Y, t)}{\partial Y^2}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN C LANJUTAN

Untuk selanjutnya dapat dituliskan bahwa  $S(x, Y, t) = S$  sehingga persamaan similaritas untuk energi yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{r} \left( r t^{\frac{1}{2}} F \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e t^{\frac{1}{2}} F \frac{\partial r}{\partial x} t^{\frac{1}{2}} u_e r \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial S}{\partial Y} & \\ &= \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \left( F \frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e \frac{1}{r} F \frac{\partial r}{\partial x} u_e \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{\partial S}{\partial Y} &= \frac{1}{t} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan  $Pr t$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} t \frac{\partial S}{\partial t} + Pr t u_e \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - Pr t F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} + Pr t u_e \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} - Pr t u_e \frac{\partial F}{\partial x} & \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + Pr t \frac{\partial u_e}{\partial x} F \frac{\partial S}{\partial Y} & \\ &= Pr \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned}$$

## LAMPIRAN D

### Non-Dimensional Kondisi Batas Bola Teriris

Kondisi batas yang digunakan adalah

$\bar{t} < 0: \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty$  untuk setiap  $\bar{x}, \bar{y}$

$\bar{t} \geq 0: \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w$  pada saat  $\bar{y} = 0$

$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} = T_\infty$  saat  $\bar{y} \rightarrow \infty$

dengan menggunakan variabel non dimensional  $y = Re^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{y}}{a}, T =$

$\frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}$  maka diperoleh

$$\bar{T} = T_\infty$$

$$T = \frac{T_\infty - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 0$$

$$\bar{T} = T_w$$

$$T = \frac{T_w - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 1$$

Sehingga kondisi batasnya menjadi

$t < 0: u = v = 0, T = 0$  untuk setiap  $x, y$

$t \geq 0: u = v = 0, T = 1$  pada saat  $y = 0$

$t = u_e(x), T = 0$  saat  $y \rightarrow \infty$

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN E

### Penurunan Kondisi Awal

Persamaan yang digunakan untuk menentukan kondisi awal yaitu

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' + t \frac{\partial u_e}{\partial x}(1 - (f')^2 + ff'') \\ = t \frac{\partial f'}{\partial t} + tu_e \left( f' \frac{\partial f'}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} f'' - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f f'' \right) - \frac{25}{16} M t (1 - f')$$

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2}s' + Prt \frac{\partial u_e}{\partial x} f s' \\ = Prt \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left( f' \frac{\partial s}{\partial x} - s' \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f s' \right) \right]$$

dengan mensubstitusikan  $t = 0$  maka diperoleh persamaan

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' = 0$$

$$s'' + \frac{Pr\eta}{2}s' = 0$$

untuk mendapatkan  $f$  digunakan persamaan

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' = 0$$

dengan menggunakan pemisalan  $h = f''$  sehingga persamaannya menjadi

$$h' + \frac{\eta}{2}h = 0$$

dengan  $h' = \frac{dh}{d\eta}$  maka persamaan  $h' + \frac{\eta}{2}h = 0$  dapat dituliskan sebagai berikut.

$$dh + \frac{\eta}{2}h d\eta = 0$$

kedua ruas dibagi dengan  $h$  sehingga diperoleh

$$\frac{1}{h}dh + \frac{\eta}{2}d\eta = 0$$

## LAMPIRAN E LANJUTAN

kedua ruas diintergralkan diperoleh

$$\ln h + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$

$$\ln h = -\frac{\eta^2}{4} + c_1$$

$$h = e^{-\frac{\eta^2}{4} + c_1}$$

$$h = e^{c_1} e^{-\frac{\eta^2}{4}}$$

karena  $h = f''$  maka

$$f'' = e^{c_1} e^{-\frac{\eta^2}{4}}$$

$$f' = \int e^{c_1} e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta$$

$$f' = e^{c_1} \int e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta$$

Dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error (erf) yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{c}x)$$

maka diperoleh

$$f' = e^{c_1} \int e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta$$

$$= e^{c_1} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + c_2$$

dengan menggunakan kondisi batas

$t \geq 0$ :  $f = f' = 0$ ,  $s = 1$  pada saat  $\eta = 0$

$f' = 1$ ,  $s = 0$  pada saat  $\eta \rightarrow \infty$

## LAMPIRAN E LANJUTAN

Akan ditentukan nilai  $e^{c_1}$  dan  $c_2$  yaitu untuk saat  $\eta = 0$

$$f' = e^{c_1} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + c_2$$

$$0 = e^{c_1} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(0) + c_2$$

$$c_2 = 0$$

saat  $\eta \rightarrow \infty$  maka diperoleh

$$f' = e^{c_1} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + c_2$$

$$1 = e^{c_1} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\infty) + 0$$

$$1 = e^{c_1} \sqrt{\pi}$$

$$e^{c_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Substitusi nilai  $e^{c_1}$  dan  $c_2$  ke  $f'$  yaitu

$$f' = e^{c_1} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + c_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + 0$$

$$= \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

$$f'' = \frac{e^{-\frac{\eta^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$f = \int f' d\eta$$

$$= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2e^{-\frac{\eta^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} + c_3$$

## LAMPIRAN E LANJUTAN

Nilai  $c_3$  dihitung dengan menggunakan kondisi batas  $f = 0$  saat  $\eta = 0$  yaitu

$$f = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2e^{-\frac{\eta^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} + c_3$$

$$0 = 0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} + c_3$$

$$c_3 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Substitusi  $c_3$  ke  $f$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2e^{-\frac{\eta^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} + c_3 \\ &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2e^{-\frac{\eta^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\ &= \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{\eta^2}{4}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan  $s$  dengan memisalkan  $s' = k$  sehingga diperoleh

$$k' + \frac{Pr\eta}{2}k = 0$$

dengan  $k' = \frac{dk}{d\eta}$  maka diperoleh

$$\frac{1}{k} dk + \frac{Pr\eta}{2} d\eta = 0$$



## LAMPIRAN E LANJUTAN

kedua ruas diintegalkan diperoleh

$$\begin{aligned}\ln k + \frac{Pr\eta^2}{4} &= c_4 \\ \ln k &= -\frac{Pr\eta^2}{4} + c_4 \\ k &= e^{-\frac{Pr\eta^2}{4} + c_4} \\ k &= e^{c_4} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}}\end{aligned}$$

Karena  $k = s'$  maka

$$\begin{aligned}s' &= e^{c_4} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} \\ s &= \int e^{c_4} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta \\ s &= e^{c_4} \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta\end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi error (erf) yaitu

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{c}x)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}s &= e^{c_4} \int e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}} d\eta \\ &= e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{Pr}}{2}\right) + c_5\end{aligned}$$

dengan menggunakan kondisi batas

$t \geq 0$ :  $f = f' = 0, s = 1$  pada saat  $\eta = 0$

$f' = 1, s = 0$  pada saat  $\eta \rightarrow \infty$

## LAMPIRAN E LANJUTAN

Akan ditentukan nilai  $e^{c_4}$  dan  $c_5$  yaitu untuk saat  $\eta = 0$

$$s = e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta \sqrt{Pr}}{2}\right) + c_5$$

$$1 = e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(0) + c_5$$

$$c_5 = 1$$

saat  $\eta \rightarrow \infty$  maka diperoleh

$$s = e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta \sqrt{Pr}}{2}\right) + c_5$$

$$0 = e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\infty) + 1$$

$$e^{c_4} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Dengan mensubstitusi  $e^{c_4}$  dan  $c_5$  ke  $s$  sehingga diperoleh

$$s = e^{c_4} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta \sqrt{Pr}}{2}\right) + c_5$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta \sqrt{Pr}}{2}\right) + 1$$

$$= \operatorname{erf}\left(\frac{\eta \sqrt{Pr}}{2}\right) + 1$$

$$s' = -\sqrt{\frac{Pr}{\pi}} e^{-\frac{Pr\eta^2}{4}}$$

## LAMPIRAN F

### Diskritisasi Model

1. Untuk *Small time*

Berdasarkan pemisalan fungsi dalam bentuk orde pertama yaitu

$$f' = u$$

$$u' = v$$

$$s' = q$$

$$v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3t}{2 \cos \theta_s}(1 - u^2 + fv) + \frac{25}{16}Mt(1 - u) + \frac{2}{3}\alpha ts$$

$$= t \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$q' + \frac{Pr}{2}\eta q + \frac{3}{2 \cos \theta_s}Prtfq = Prt \frac{\partial s}{\partial t}$$

dapat didiskritisasi menjadi

1.  $\frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = u_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)$
2.  $\frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) = v_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n)$
3.  $\frac{1}{l_j}(s_j^n - s_{j-1}^n) = q_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(s_j^n - s_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n)$
4.  $\frac{1}{2} \left[ (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$

dengan

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n = \left[ v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3t}{2 \cos \theta_s}(1 - u^2 + fv) + \frac{25}{16}Mt(1 - u) + \frac{2}{3}\alpha ts \right]_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$= \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$+ \frac{3t^n}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

$$+ \frac{25}{16}Mt^n \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{2}{3}\alpha t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n$$

## LAMPIRAN F LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[ v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3t}{2\cos\theta_s}(1-u^2+fv) + \frac{25}{16}Mt(1-u) + \frac{2}{3}ats \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 &= \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 &\quad + \frac{3t^{n-1}}{2\cos\theta_s} \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 &\quad + \frac{25}{16}Mt^{n-1} \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{2}{3}\alpha t^{n-1}s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left( \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3t^n}{2\cos\theta_s} \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^nv_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right. \\
 &\quad + \frac{25}{16}Mt^n \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{2}{3}\alpha t^ns_{j-\frac{1}{2}}^n + \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
 &\quad + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3t^n}{2\cos\theta_s} \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{25}{16}Mt^{n-1} \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{2}{3}\alpha t^{n-1}s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &\quad - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 &= \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3t^n}{2\cos\theta_s} \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^nv_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 &\quad + \frac{25}{16}Mt^n \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{2}{3}\alpha t^ns_{j-\frac{1}{2}}^n - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &= - \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3t^n}{2\cos\theta_s} \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 &\quad - \frac{25}{16}Mt^{n-1} \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{2}{3}\alpha t^{n-1}s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN F LANJUTAN

$$5. \quad \frac{1}{2} \left[ (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = Prt^{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{s_{j-\frac{1}{2}}^n - s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned} (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[ q' + \frac{Pr}{2} \eta q + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Prt f q \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[ q' + \frac{Pr}{2} \eta q + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Prt f q \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &= \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &\quad + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Prt^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\left( \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Prt^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Prt^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\ &= \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{Prt^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

## LAMPIRAN F LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &\quad - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &= - \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 &\quad - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

### 2. Untuk *Large time*

Berdasarkan pemisalan fungsi dalam bentuk orde pertama yaitu

$$F' = U$$

$$U' = V$$

$$S' = Q$$

$$V' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} (1 - U^2 + FV) + \frac{25}{16} M(1 - u) + \frac{2}{3} \alpha S = t \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$Q' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr f Q = Pr t \frac{\partial S}{\partial t}$$

dapat didiskritisasi menjadi

1.  $\frac{1}{l_j} (F_j^n - F_{j-1}^n) = U_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (F_j^n - F_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (U_j^n - U_{j-1}^n)$
2.  $\frac{1}{l_j} (U_j^n - U_{j-1}^n) = V_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (U_j^n - U_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (V_j^n - V_{j-1}^n)$
3.  $\frac{1}{l_j} (S_j^n - S_{j-1}^n) = Q_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j} (S_j^n - S_{j-1}^n) = \frac{1}{2} (Q_j^n - Q_{j-1}^n)$
4.  $\frac{1}{2} \left[ (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = t^{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{U_{j-\frac{1}{2}}^n - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$

## LAMPIRAN F LANJUTAN

Dengan

$$\begin{aligned}
 (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[ V' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} (1 - U^2 + FV) + \frac{25}{16} M(1 - U) + \frac{2}{3} \alpha S \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &= \left( \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 &\quad + \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[ V' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} (1 - U^2 + FV) + \frac{25}{16} M(1 - U) + \frac{2}{3} \alpha S \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 &= \left( \frac{V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 &\quad + \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left( \left( \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right. \\
 &\quad + \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n + \left( \frac{V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
 &\quad + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 &= \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN F LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 &\quad + \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &= - \left( \frac{V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 &\quad - \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$5. \quad \frac{1}{2} \left[ (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = Pr t^{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{S_{j-\frac{1}{2}}^n - S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left[ Q' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F Q \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &= \left( \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= \left[ Q' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F Q \right]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 &= \left( \frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$



## LAMPIRAN F LANJUTAN

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left( \left( \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n + \left( \frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 & = \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 & = \left( \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 & = - \left( \frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN G

### Linierisasi dengan Metode Newton

Untuk *small time*

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta f_j - \delta f_{j-1}) &= \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) \\ (\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) &= \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) \\ (\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_j}(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) &= \frac{1}{2}(s_j^n + s_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta q_j + \delta q_{j-1}) \\ (\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j + \delta q_{j-1}) &= -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n + q_{j-1}^n) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} &\left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\ &\quad + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \right) \\ &\quad + \frac{25}{16} M t^n \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) + \frac{2}{3} \alpha t^n \left( s_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) \\ &\quad - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = R_1 \end{aligned}$$

## LAMPIRAN G LANJUTAN

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n 2u_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 \\
&\quad + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad + \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad - \frac{25}{16} M t^n \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) + \frac{2}{3} \alpha t^n \left( \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \\
&= - \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left( v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&\quad - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&\quad - \frac{25}{16} M t^n \left( 1 - v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{2}{3} \alpha t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&\quad + R_1
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{Pr}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} \left( q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad + Pr t^n \left( f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( s_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) = R_2
\end{aligned}$$

## LAMPIRAN G LANJUTAN

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{Pr}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} + \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad + Pr t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + Pr t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad + Pr t^n \left( \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad \quad - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) \\
&= - \left( \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{Pr}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n - Pr t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n) + 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&\quad + R_2
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
R_1 &= - \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&\quad - \frac{3}{2 \cos \theta_s} t^n \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
&\quad \quad - \frac{25}{16} M t^{n-1} \left( 1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
&\quad - \frac{2}{3} \alpha t^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
R_2 &= - \left( \frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - Pr \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&\quad - \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

## LAMPIRAN G LANJUTAN

Untuk *large time*

1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j}(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta F_j - \delta F_{j-1}) &= \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta U_j + \delta U_{j-1}) \\ (\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta U_j + \delta U_{j-1}) &= -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(U_j^n + U_{j-1}^n)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j}(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta U_j - \delta U_{j-1}) &= \frac{1}{2}(V_j^n + V_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta V_j + \delta V_{j-1}) \\ (\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta V_j + \delta V_{j-1}) &= -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(V_j^n + V_{j-1}^n)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_j}(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j}(\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) &= \frac{1}{2}(S_j^n + S_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\delta Q_j + \delta Q_{j-1}) \\ (\delta S_j - \delta S_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Q_j + \delta Q_{j-1}) &= -(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n + Q_{j-1}^n)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j}\right) + \left(\frac{\delta V_j - \delta V_{j-1}}{l_j}\right) \\ &\quad + \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta U_j - \delta U_{j-1}}{2}\right)^2\right. \\ &\quad \left.+ \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta F_j - \delta F_{j-1}}{2}\right) \left(V_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta V_j - \delta V_{j-1}}{2}\right)\right) \\ &\quad + \frac{25}{16} M \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta U_j - \delta U_{j-1}}{2}\right) + \frac{2}{3} \alpha \left(S_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2}\right) \\ &\quad - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta U_j - \delta U_{j-1}}{2}\right) = R_1\end{aligned}$$

## LAMPIRAN G LANJUTAN

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\delta V_j - \delta V_{j-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} 2U_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta U_j - \delta U_{j-1}}{2} \right) \\
&- \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( \frac{\delta U_j - \delta U_{j-1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2 \cos \theta_s} F_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta V_j - \delta V_{j-1}}{2} \right) \\
&+ \frac{3}{2 \cos \theta_s} V_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta F_j - \delta F_{j-1}}{2} \right) \\
&+ \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( \frac{\delta F_j - \delta F_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta V_j - \delta V_{j-1}}{2} \right) \\
&- \frac{25}{16} M \left( \frac{\delta U_j - \delta U_{j-1}}{2} \right) + \frac{2}{3} \alpha \left( \frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( \frac{\delta U_j - \delta U_{j-1}}{2} \right) \\
&= - \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{l_j} - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
&- \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^n + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n + R_1
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left( \frac{\delta Q_j - \delta Q_{j-1}}{l_j} \right) \\
&\quad + Pr \left( F_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) \left( Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) \\
&\quad - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( S_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) = R_2
\end{aligned}$$

## LAMPIRAN G LANJUTAN

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{\delta Q_j - \delta Q_{j-1}}{l_j} \right) + \left( \frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) + Pr F_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) \\
 &\quad + Pr Q_{j-\frac{1}{2}}^n \left( \frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) \\
 &\quad + Pr \left( \frac{\delta F_j + \delta F_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{\delta Q_j + \delta Q_{j-1}}{2} \right) \\
 &\quad - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( \frac{\delta S_j + \delta S_{j-1}}{2} \right) \\
 &= - \left( \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) - Pr \left( F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2
 \end{aligned}$$

Dengan

$$\begin{aligned}
 R_1 &= - \left( \frac{V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} \left( 1 - \left( U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
 &\quad - \frac{25}{16} M \left( 1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \frac{2}{3} \alpha S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 R_2 &= - \left( \frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2 \cos \theta_s} Pr F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
 &\quad - 2 \frac{Pr t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
 \end{aligned}$$



## BIODATA PENULIS



**Mochamad Satria Dharma Utama** atau biasa dipanggil Satria terlahir di Blitar, 13 Juli 1994. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Sumaji (Alm.) dan Sri Ponimi. Penulis telah menempuh pendidikan formal di SD Negeri Papungan 1, SMP Negeri 1 Blitar dan SMA Negeri 1 Blitar. Melalui jalur SNMPTN Undangan, penulis diterima di Jurusan S1 Matematika, FMIPA ITS Surabaya pada tahun 2013. Di

jurusan Matematika, penulis mengambil bidang minat Peodelan.

Semasa kuliah, penulis juga aktif berorganisasi dan kegiatan kemahasiswaan, diantaranya aktif sebagai staff Departemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa KSR PMI ITS, sebagai staff Departemen Dalam Negeri BEMF FMIPA ITS, staff Departemen Pengabdian Masyarakat HIMATIKA ITS periode 2014/2015, sebagai Tim *Steering Committee* Pengkaderan Padamu HIMATIKA ITS (PH) 2015

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: [msatriadu@gmail.com](mailto:msatriadu@gmail.com).